كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الثانية: هندسة تحليلية ، رياضيات س1

د. هالة محمد - أ. محسن سلطان محمود

تمرين (1): اكتب المعادلة القطبية للمنحنى الديكارتي $y = x\sqrt{\frac{x}{2R-x}}$ حيث R عدد ثابت

الحل: نوحد تربيع الطرفين للتخلص من الجذر.

$$y^2 = x^2\left(\frac{x}{2R-x}\right)$$

حيث أن $y = \rho\sin\theta$ ، $x = \rho\cos\theta$

$$(\rho\sin\theta)^2 = (\rho\cos\theta)^2\left(\frac{\rho\cos\theta}{2R-\rho\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \rho^2\sin^2\theta = \rho^2\cos^2\theta\left(\frac{\rho\cos\theta}{2R-\rho\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow (2R-\rho\cos\theta)\sin^2\theta = \rho\cos^3\theta$$

$$2R\sin^2\theta - \rho\cos\theta\sin^2\theta = \rho\cos^3\theta$$

$$2R\sin^2\theta = \rho\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \Rightarrow \rho = \frac{2R\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

وهي المعادلة القطبية للمنحنى.

وظيفة: اكتب المعادلة الديكارتية للمنحنى القطبي

$$\rho = \frac{\sin\theta}{4\tan\theta - 1}$$

تذكير: العلاقة بين الإحداثيات الأسطوانية

$M(r,\theta,\varphi) \rightarrow M(x,y,z)$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

تمرين 2

طلب ① أوجد الإحداثيات z للنقطة M التي تحقق أن منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو $A(1,\frac{\pi}{2},2)$ أسطوانية

و $B(2\sqrt{3},0,\frac{\pi}{3})$ كروية

الحل

$A(\rho,\varphi,z) = (1,\frac{\pi}{2},2)$

$x = \rho\cos\theta = 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ، $y = \rho\sin\varphi = 1$ ، $z = 2$

إذن $A(0,1,2)$

$B(r,\theta,\varphi) = (2\sqrt{3},0,\frac{\pi}{3}) \Rightarrow B(0,0,2\sqrt{3})$

M منتصف $[AB]$

$x_M = \frac{0+0}{2} = 0$ ، $y_M = \frac{1}{2}$ ، $z_M = 1+\sqrt{3}$

$M(0,\frac{1}{2},1+\sqrt{3})$

② أوجد الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

$\cos(\hat{A.B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{(0,1,2)(0,0,2\sqrt{3})}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

③ احسب مساحة المثلث OAB

$S = \frac{1}{2}|\vec{A}\wedge\vec{B}|$

$$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\vec{i}\,(2\sqrt{3}-0) - \vec{j}\,(0) + \vec{k}\,(0)\right|$$

$$= |2\sqrt{3}\,\vec{i}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

تمرين 3 } لتكن لدينا:

$$\vec{U_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{U_2} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$$
$$\vec{U_3} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

المطلوب } (1) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{U_2}$, $\vec{U_3}$

(2) أوجد جيب تمام الزاوية للمتجه $\vec{U_3}$

(3) أثبت أن المثلث الواقع على المتجهين $\vec{U_1}$, $\vec{U_3}$ تمام . ثم أحسب مساحته

(4) احسب حجم متوازي السطوح المرسوم على $(\vec{U_1}, \vec{U_2}, \vec{U_3})$

الحل (1)

$$\cos(\vec{U_2}, \vec{U_3}) = \frac{\vec{U_2}\cdot\vec{U_3}}{\|\vec{U_2}\|\,\|\vec{U_3}\|} = \frac{-1}{5\sqrt{3}}$$

---

(2) جيب تمام الزاوية للمتجه $\vec{U_3}$ $\qquad \vec{U_3}\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

جيوب التمام:

$$\alpha = \mp\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = \mp\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

③ شرط التعامد ((الجداء السلمي = 0))

$$\vec{U_1}\cdot\vec{U_3} = (1,2,-3)(1,1,1) = 1+2-3 = 0$$

$\Leftarrow \vec{U_1} \perp \vec{U_3}$ المثلث قائم.

ماهيته

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{U_1}\wedge\vec{U_3}\right|$$

$$\vec{U_1}\wedge\vec{U_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$\left|\vec{U_1}\wedge\vec{U_3}\right| = \sqrt{42}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{42}$$

④ حجم متوازي السطوح.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{U_1},\vec{U_2},\vec{U_3})\right|$$

الجداء المختلط.

$$(\vec{U_1}\wedge\vec{U_2},\vec{U_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 14 - 9 = -19$$

$$V = \frac{1}{6}\left|-19\right| = \frac{19}{6}$$

تمرين 4 } أثبت أن المتجهات التالية تقع في مستوي واحد.

$$\begin{cases} \vec{U}_1 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{U}_2 = -\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{U}_3 = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} \end{cases}$$

الحل) نشكل المحدد المتتابع لهذه المتجهات

$$(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ المتجهات $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ في مستوي واحد.

تمرين 5 } أثبت أن النقاط الأربعة الآتية في مستوي واحد

$M_1(1,6,3)\ M_2(7,-18,2)\ M_3(3,-2,4)\ M_4(4,4,9)$

الحل) حتى تقع النقاط في مستوي واحد يجب أن يكون

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M_4}) = 0$$

$\vec{M_1M_2}\ (6, -24, -3)$

$\vec{M_1M_3}\ (2, -8, -1)$

$\vec{M_1M_4}\ (3, -2, 4)$

نشر محدد

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M_4}) = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ 6 & -24 & -3 \\ 2 & -8 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ النقاط في مستوي واحد.

د. جلال محمد