كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

$N = \int x\sqrt{1+x}$

$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$u = x \quad du = 1\,dx$

$dv = \sqrt{1+x} \quad v = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$$N = x.\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \int \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} = x\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \int \frac{1}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= x\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \int \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} + c$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} - \sqrt{1+x} + c$$

$P = \int \arctan x\,dx$

$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$ بدون جذر

$dv = 1 \quad v = x$

$$P = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

- حساب التكاملات الكسرية :

- الدالة الكسرية : هي كل دالة من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود

- حساب تكامل دالة كسرية يميز الحالات الآتية :

① الكسر الغير بسيط : أي أن درجة البسط أعلى من درجة المقام نجري قسمة إقليدية ثم نكامل

مثال :

$$A = \int \frac{2x^3+5x^2+8}{x+1}\,dx$$

$$A = \int \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}\,dx$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x-3 \\
x+1 & 2x^3+5x^2+8 \\
 & \mp 2x^3 \mp 2x^2 \\
 & 3x^2+8 \\
 & \mp 3x^2 \mp 3x \\
 & -3x+8 \\
 & \pm 3x \pm 3 \\
 & +11
\end{array}
$$

$$\int \left[2x^2+3x-3 + \frac{11}{x+1} \right] dx$$

$$= 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 3x + 11\ln(x+1) + c$$

② الكسر البسيط : درجة البسط أصغر من درجة المقام : إجراء التكامل نجزئ الكسر إلى مجموع كسور أولية ثم نكامل أي نجزئه إلى كسور من الشكل :

① $\frac{A}{mx+a}$ ② $\frac{A}{(mx+a)^{\alpha}}$ ③ $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

④ $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}$

مثال :

احسب التكاملات الآتية :

$$I = \int \frac{5x+1}{x^2-4}\,dx$$

لدينا طريقتان :

1) الكسر والمقام يتحلل :

$$(x^2-4) = (x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow I = f(x) = \frac{5x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)}_{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)}_{(x-2)}$$

$$= \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}$$

بالمطابقة نجد :

$$\frac{5x+1}{(x-2)(x+2)} = x(A+B) + 2A - 2B$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=5 \\ 2A-2B=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2A+2B=10 \\ 2A-2B=1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بالجمع}} 4A=11 \Rightarrow A=\frac{11}{4}$$

نعوض في $A+B=5$

$$\frac{11}{4}+B=5 \Rightarrow B = 5-\frac{11}{4} \Rightarrow B = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int\left(\frac{\frac{11}{4}}{(x-2)} + \frac{\frac{9}{4}}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{11}{4}\ln|x-2| + \frac{9}{4}\ln|x+2| + c$$

$$= \ln\sqrt[4]{|x-2|^{11}} + \ln\sqrt[4]{|x-2|^{9}} + c$$

ط2 : لمعرفة A : نضرب بمقامها بـ (X-2) ثم نجعل X→+2

$$(X-2)\quad \frac{5X+1}{\cancel{(X-2)}(X+2)} = \frac{A}{\cancel{(X-2)}} + \frac{B}{(X+2)}$$

نضرب بـ (X-2) ثم نجعل X→+2

$$\Rightarrow \lim_{X\to 2}\frac{5X+1}{(X+2)} = A + \lim_{X\to 2}\boxed{\frac{B(X-2)}{(X+2)}} = 0$$

$$\frac{11}{4} = A + 0 \Rightarrow A = \frac{11}{4}$$

لمعرفة B : نضرب بمقامها بـ (X+2) ثم نجعل X→-2

$$\Rightarrow \cancel{(X+2)}\quad \frac{5X+1}{(X-2)\cancel{(X+2)}} = \frac{A}{(X-2)} + \frac{B}{\cancel{(X+2)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{X\to -2}\frac{5X+1}{(X-2)} = \lim_{X\to -2}\boxed{\frac{A(X+2)}{(X-2)}} + B \quad =0$$

$$\Rightarrow \frac{-9}{-4} = 0 + B \Rightarrow B = \frac{9}{4}$$

ملاحظة : كل مضروب خطي (مقام) من الشكل $(ax+b)$ مكرر n مرة سيقابله n كسراً أولياً من الشكل :

$$= \boxed{\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}}$$

و كل مضروب تربيعي من الشكل (ax^2+bx+c) غير قابل للتحليل ومكرر n مرة سيقابله n كسراً أولياً من الشكل :

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}}$$

مثال :
$$I = \int \frac{3x-1}{\underbrace{x^3+2x^2+x}_{f(x)}}\, dx$$

الأسر بط . المقام يتحلل :

$$x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \quad \text{---} \; (*)$$

نستخدم (لم) في إيجاد A و B و C :

لإيجاد A : نضرب ب x ونجعل $x \to 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3x-1}{(x+1)^2} = A + \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{Bx}{(x+1)^2}}}_{=0} + \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{Cx}{(x+1)}} = 0$$

$$\frac{-1}{1} = A \Longrightarrow A = -1$$

لحساب B : نضرب ب $(x+1)^2$ ونجعل $x \to -1$

$$\Longrightarrow (x+1)^2 \frac{3x-1}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \underbrace{\boxed{\frac{A}{x}}}_{=0} + \frac{B}{(x+1)} + \lim_{x\to -1} \boxed{\frac{C}{(x+1)}} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{x} = B \Longrightarrow \frac{-4}{-1} = B \Longrightarrow B = 4$$

لحساب C نعوض $A=-1$ $B=4$ في (*) و $x=1$

$$\Longrightarrow \frac{3-1}{(2)^2} = \frac{-1}{1} + \frac{4}{(2)^2} + \frac{C}{2}$$

$$\frac{2}{4} = -1 + 1 + \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow I = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= -\ln|x| + 4\int (x+1)^{-2} + \ln|x+1| + C$$

حسب خواص اللوغاريتم: $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + \frac{4(x+1)^{-2+1}}{-2+1}$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + \frac{4(x+1)^{-1}}{-1}$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{4}{(x+1)}$$

انتهت المحاضرة