كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : **الرابعة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٤

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- احسب التكاملات الآتية:

① $Q = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

$t = 1+\sqrt{x} \qquad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \qquad dx = 2\sqrt{x}\,dt$

$\Rightarrow Q = \int \frac{2\sqrt{x}\,dt}{\sqrt{x}\sqrt{t}} \Rightarrow Q = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{t}}$

$= 2\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] + c$

$= 2\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = 4\sqrt{t} + c$

$\Rightarrow Q = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$

② $R = \int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ ✱ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$t = 1+\cos^2 x \Rightarrow dt = 0 + 2\cos x\,(-\sin x)\,dx$

$= -2\cos x \sin x\,dx$

$-dt = -2\sin 2x\,dx$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - A to Z مكتبة

$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin 2x}$$

$$\Rightarrow R = \int \frac{\sin 2x \cdot \frac{dt}{-\sin 2x}}{\sqrt{t}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow R = \int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c$$

$$= -2\sqrt{t} + c = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{R = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + c}$$

* صيغة التكامل بالتجزئة

إذا كانت $u(x)$ و $v(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن بقانون أو دستور تفاضل جداء دالتين:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u\, dv$$

بمكاملة الطرفين:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

$$u \cdot v = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

$$\Rightarrow u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

القانون:

$$\Rightarrow \boxed{u \cdot v - \int v \cdot du = \int u \cdot dv}$$

* أو بشكل آخر:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(*) تستخدم هذه الطريقة في حساب التكاملات ذات الأشكال التالية:

(1) $\int P(x) \cdot \sin(ax+b)\, dx$

(2) $\int P(x) \cdot \cos(ax+b)\, dx$

(3) $\int P(x) \cdot e^{ax+b}\, dx$

(4) $\int P(x) \cdot g(x)\, dx$

(5) $\int P(x) \cdot \ln(ax+b)\, dx$

$u = \ln(ax+b)$ / $dv = P(x)dx$ ← هنا نفرض

من (1) إلى (4) الفرضية دائماً:
$u = P(x)$
الآخر dv

مثال (1):

$$I = \int \underbrace{(2x+1)}_{u} \sin x\, dx$$

$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\,dx$

$dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x$ (تكامل x)

تذكر:
$\int \sin x = -\cos x$
$\int \cos x = \sin x$

$$\Rightarrow I = u \cdot v - \int v \cdot du$$
$$= (2x+1)(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2\, dx$$
$$= -(2x+1)(\cos x) + 2\int \cos x\, dx$$
$$= -(2x+1)(\cos x) + 2\sin x + c$$
$$\Rightarrow I = -(2x+1)(\cos x) + 2\sin x + c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (2):

$$J = \int (e^{X+5})(3X+1)\,dX$$

$$u = 3X+1 \Rightarrow du = 3\,dX$$
$$dv = e^{X+5} \Rightarrow v = e^{X+5}$$

$$J = u.v - \int v.du$$
$$= (3X+1)(e^{X+5}) - \int 3.e^{X+5}\,dX$$
$$= (3X+1)(e^{X+5}) - 3\int e^{X+5}\,dX$$
$$J = (3X+1)(e^{X+5}) - 3(e^{X+5}) + C$$

مثال (3):

$$K = \int (X^2+5)\,e^{3X+1}\,dX$$

$$u = X^2+5 \Rightarrow du = 2X\,dX$$
$$dv = e^{3X+1} \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3X+1}\,dX$$

$$K = u.v - \int v.du$$
$$= (X^2+5)\left(\frac{1}{3}e^{3X+1}\right) - \int \frac{1}{3}e^{3X+1}.2X\,dX$$

$$K = \frac{1}{3}(X^2+5)(e^{3X+1}) - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{3X+1}X.dX}_{M}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{1}{3}(X^2+5)e^{3X+1} - \frac{2}{3}M$$

نحسب M :

$$M = \int X e^{3X+1} dX$$

$$u = X \Rightarrow du = 1\,dX$$

$$dv = e^{3X+1} \Rightarrow v = e^{3X+1}$$

$$M = u \cdot v - \int v\,du$$

$$= \frac{1}{3}X e^{3X+1} - \int \frac{1}{3} e^{3X+1} dX$$

$$= \frac{1}{3}X e^{3X+1} - \frac{1}{3} e^{3X+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + C$$

نخرج $\frac{1}{3}e^{3X+1}$ عامل مشترك :

$$\Rightarrow M = \frac{1}{3} e^{3X+1} \left[X - \frac{1}{3}\right] + C$$

نعوض في I

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}(X^2+5)e^{3X+1} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} e^{3X+1}\left(X - \frac{1}{3}\right)\right] + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} e^{3X+1}\left[(X^2+5) - \frac{2}{3}\left(X - \frac{1}{3}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{3X+1}\left(X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{9} + 5\right) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3} e^{3X+1}\left(X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{47}{9}\right) + C}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (4) :

$$N = \int x^3 \ln x \, dx$$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x^3 \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4} x^4$

$$N = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{4} x^4 - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln x \cdot x^4 - \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right] + c$$

$$N = \frac{1}{4} x^2 \left[\ln x - \frac{1}{4} \right] + c$$

ملاحظة : عندما يكون :

$I = \int f(x)$ { $\arctan x$ ، $\arcsin x$ ، $\arccos x$ } نفرض (u)

$f(x)$ دائماً dv

$\arc(\ ) = u$ نفرض دائماً

$f(x) = dv$ ،

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z