كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الثالثة

2025/5/26

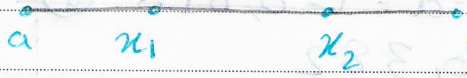
طريقة التقسيم الذهبي :

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد قيمة دالة الهدف عند نقطتين في مجال معطى يتم اختيارهما بحيث أن كل منهما تقسم المجال المعطى بنسبة $\frac{1}{2} < r < 1$

الشكل العام لكل الأمثلة التي تعالجها هذه الطريقة هو $\min f(x)$ $x \in [a,b]$

حيث أن $f(x)$ هي دالة الهدف وهي دالة لمتغير واحد x على المجال $[a,b]$

بداية قلنا أنه يوجد نقطتين x_1, x_2 بحيث $a < x_1 < x_2 < b$



$$d_1 = x_2 - a = b - x_1$$

$$x_2 - a = r(b-a) \quad (1)$$

$$b - x_1 = r(b-a) \quad (2)$$

نفرض أن $f(x_1) < f(x_2)$ في هذه الحالة سوف يكون مجال البحث الجديد هو $[a, x_2]$

نعرف الآن نقطة ثالثة x_3 واقعة ضمن المجال الجديد بحيث تبعد $x_2 = b$ عن a نفس بعد x_3 عن x_1

تبقى نسبة تقليص المجال في كل خطوة ثابتة [r ثابتة]

أي أن :

$$d_2 = x_1 - a = x_2 - x_3 \quad (3)$$

$$x_1 - a = r(x_2 - a) \quad (4)$$

$$x_2 - x_3 = r(x_2 - a) \quad (5)$$

بما أن : $x_2 - a = d_1$

$x_1 - a = d_2$

نلاحظ أن :

$d_2 = r d_1$ وفي كل خطوة تكرارية يكون لدينا

$$d_{n+1} = r d_n$$

نعوض (1) و (2) في العلاقة (4) نجد أن :

$$b - r(b-a) - a = r[a + r(b-a) - a]$$

بعد الإصلاح :

$(b-a)(1-r-r^2)=0$

$\Leftrightarrow 1-r-r^2=0$

$r_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $r_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

r_1 هي النسبة التي تحقق $\frac{1}{2}<r<1$

وإذاً فإن نسبة التقسيم في هذه الطريقة هي:

$r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\simeq 0,618$

ونرمز لها غالباً $\tau=0,618$

وتدعى النسبة الذهبية

وإذا شرط التوقف مهو حصر نقطة مثلية الأمثلية ضمن مجال طوله $b-a<\varepsilon$

خوارزمية التقسيم الذهبي:

① نعرف $f(x)$ دالة الهدف والمجال $[a,b]$ المجال الابتدائي

② $d=b-a$

③ $d=d.\tau$ حيث $\tau=0,618$

④ $x_2=a+d$ و $x_1=b-d$

⑤ إذا كان $f(x_2)>f(x_1)$ فإن $a=x_1$ و $b=x_2$ وإلا فإن

⑥ إذا كان $b-a<\varepsilon$ توقف وإلا عُد إلى الخطوة (2)

مثال:

حل مسألة الأمثلية التالية:

$\varepsilon=0,3$, $\min f(x)=e^{-x}-\cos x$

على المجال $[0,1]$ بطريقة التقسيم الذهبي

الحل:

① $f(x)=e^{-x}-\cos x$

$[a,b]=[0,1]$

② $d=1-0=1$

③ $d=d.\tau=1\times 0,618$
$=0,618$

④ $x_1=b-d=1-0,618$
$=0,382$

$x_2=a+d=0+0,618$
$=0,618$

⑤ $f(x_1)=f(0,382)=-0,317$

$f(x_2)=f(0,618)=-0,460$

$f(x_2)<f(x_1)$

وبالتالي $a=0,382$
$b=1$

⑥ المجال الجديد هو $[0,382 , 1]$

$|1 - 0,382| \not< \varepsilon = 0,3$

نعود للخطوة (2)

① $d = 1 - 0,382 = 0,618$

③ $d = d \cdot \tau = 0,618 \times 0,618$
$= 0,382$

④ $x_1 = b - d = 1 - 0,382$
$= 0,618$
$x_2 = a + d = 0,382 + 0,382$
$= 0,764$

⑤ $f(x_1) = f(0,618) = -0,460$

$f(x_2) = f(0,764) = -0,533$

$f(x_2) < f(x_1)$

بالتالي $a = x_1 = 0,618$
$b = 1$

والمجال الجديد هو
$[0,618 , 1]$

⑥ $|b - a| = |1 - 0,618| = 0,382 \not< \varepsilon$

عندئذٍ نعود للخطوة (2)

② $b - a = 1 - 0,618 = 0,382$

③ $d = d \cdot \tau = 0,382 \times 0,618$
$= 0,236$

④ $x_1 = b - d = 1 - 0,236 = 0,764$

$x_2 = a + d = 0,618 + 0,236 = 0,854$

⑤ $f(x_1) = f(0,764) = -0,533$

$f(x_2) = f(0,854) = -0,574$

$f(x_1) > f(x_2)$

$a = x_1 = 0,764 \quad b = 1$

والمجال الجديد هو $[0,764 , 1]$

⑥ $|1 - 0,764| = 0,236 < \varepsilon$

الشرط محقق نتوقف

طريقة القاطع :

ان طريقة نيوتن تقترض انه من الممكن ايجاد $f'(x_{k+1})$ ، $f'(x_k)$ عند كل خطوة تكرارية ، ولكن قد يتعذر ايجاد المشتق من المرتبة الثانية في بعض الحالات لذلك فإننا نستخدم تقريباً له :

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

ونصبح الخطوة التكرارية في طريقة نيوتن بالشكل:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k)$$

أو بصيغة مكافئة:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k f'(x_k) - x_{k-1} f'(x_k)}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$$

طريقة نيوتن في الفضاء $\mathbb{R}^n$:

تستخدم هذه الطريقة في حل مسائل الأمثليات من الشكل:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

وهي مسائل امثليات غير مقيدة

* تستخدم طريقة الانحدار الأشد المشتق الأول في اختيار اتجاه البحث بينما تستخدم طريقة نيوتن ((احياناً تدعى نيوتن راسون)) المشتقين الأول والثاني انطلاقاً من نقطة ابتدائية، فتحدد تقريباً تربيعياً لدالة الهدف بحيث يتوافق المشتقين الأول والثاني لدالة الهدف مع المشتقين الأول والثاني لهذا التقريب التربيعي عند تلك النقطة.

تقوم بالبحث عن القيم الصغرى لدالة التقريب التربيعية بدلاً من البحث عن القيم الصغرى لدالة الهدف إن النقطة الصغرى لدالة التقريب التربيعية تستعمل كتخمين للنقطة الموجودة في هذه الخطوة التكرارية نحصل على تقريب تربيعي لدالة الهدف $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ القابلة للاشتقاق من منشور تايلور حول النقطة الحالية X_k وذلك بإهمال الحدود ذات الدرجة الأكبر من 2

$$f(X) = f(X_k) + (X - X_k)^T g_k + \frac{1}{2}(X - X_k)^T F(X_k)(X - X_k)$$

حيث $g_k = \nabla f(X_k)$

$F(X_k)$ في صفوفة هيسيان للدالة f عند النقطة X_k

/ /

الخطوة التكرارية في طريقة نيوتن هي:

$$X_{k+1} = X_k - |F(X_k)^{-1}| \nabla f(X_k)$$