كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الثانية

2025/5/19

طرائق البحث أحادية البعد:

إن طرق البحث التي سوف نناقشها فيما يلي تتعلق بمسائل الأمثليات غير المقيدة، والتي لها دوال هدف لمتغير واحد

$$\min_{x \in [a,b]} f(x)$$

نشترط فقط كل مسائل الأمثليات بالطرق التالية أن تكون دالة الهدف f ثنائية الطور على المجال $[a,b]$، ولها نقطة صغرى محلياً وحيدة على هذا المجال

ندرس الطرق التالية:

1. طريقة نيوتن
2. طريقة القاطع
3. طريقة التقسيم الذهبي
4. طريقة فيبوناتشي

أولاً:

طريقة فيبوناتشي

تقدم طريقة فيبوناتشي حلولاً لمسائل الأمثليات التي لها الشكل

$$\min_{x \in [a,b] \subset \mathbb{R}} f(x)$$

تهدف إلى حصر نقطة الصغرى الأمثلية ضمن مجال صغير نسبياً أو صغير بشكل مقبول حيث يتم التقليل من طول المجال الواقعة ضمنه نقطة الصغرى الأمثلية عند كل تكرار بنسبة صغيرة r_k تختلف قيمتها من خطوة تكرارية إلى أخرى

تعتمد هذه الطريقة على الأعداد فيبوناتشي

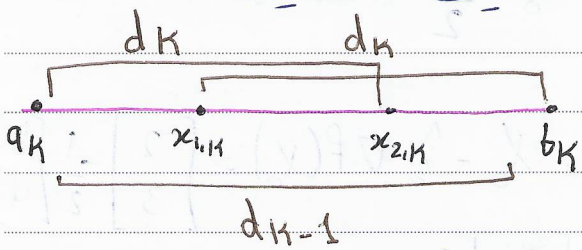
$$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2$$

$$F_3 = 3 \quad F_4 = 5 \quad F_5 = 8$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2$$

عند التكرار k:

لدينا النقطتين $x_{1,k}$ و $x_{2,k}$ نقيم دالة الهدف f عند هاتين النقطتين



نفرض أن:

$f(x_{1,k}) < f(x_{2,k})$ يصبح مجال البحث الجديد هو

$$a_{k+1} = a_k \quad , \quad b_{k+1} = x_{2,k}$$

$$x_{1,k} = x_{2,k+1}$$

وفي حال كان $f(x_{1,k}) > f(x_{2,k})$ ليصبح مجال البحث الجديد هو

$$a_{k+1} = x_{1,k} \qquad b_{k+1} = b_k$$

$$x_{2,k} = x_{1,k+1}$$

Nehad S A B B A G H

إن هذا الإجراء سوف يؤدي إلى تقليص طول المجال حول min f

نفترض أن طول المجال الجديد هو:

$$d_k = r_k (b_k - a_k)$$

$$d_k = r_k \, d_{k-1}$$

سوف نجد العلاقة بين r_k و r_{k+1} في حالة $f(x_{1k}) < f(x_{2k})$ بدءاً من ملاحظة أن

$$[x_{2k} - x_{1k} = b_{k+1} - x_{2,k+1}] \quad (*)$$

* نناقش الطرف الأيسر:

$$x_{2,k} - x_{1,k} = (b_k - a_k) - (x_{1,k} - a_k)$$

$$= -(b_k - x_{2,k})$$

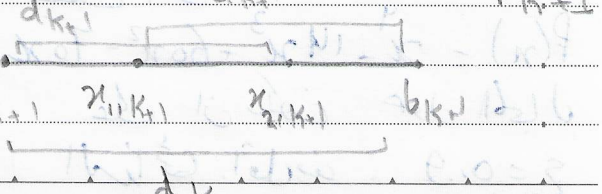
$$x_{2,k} - x_{1,k} = (b_k - a_k) - (1 - r_k)(b_k - a_k)$$

$$-(1 - r_k)(b_k - a_k)$$

$$= (b_k - a_k)(1 - 1 + r_k - 1 + r_k)$$

$$= (b_k - a_k)(2r_k + 1)$$

* نناقش الطرف الأيمن:



$$b_{k+1} - x_{2,k+1} = (1 - r_{k+1})(b_{k-1} - a_{k+1})$$

$$= (1 - r_{k+1}) r_k (b_k - a_k)$$

في التساوي في العلاقة (*) نجد أن:

$$(2r_k - 1)(b_k - a_k) = (1 - r_{k+1}) r_k (b_k - a_k)$$

$$2r_k - 1 = r_k (1 - r_{k+1})$$

بالإصلاح نجد أن:

$$r_{k+1} = \frac{1 - r_k}{r_k}$$

نفرض أن: $r_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$

عندئذٍ نجد أن:

$$r_{k+1} = \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}$$

$$\vdots$$

$$r_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

$$r_n = \frac{F_0}{F_1} = 1$$

$$r_{n-1} = \frac{1}{2}$$

إذا كان المطلوب هو أن يكون طول المجال النهائي أصغر من $\varepsilon > 0$ فإنه يجب أن يكون

$$2d_n < \varepsilon$$

$$d_n = r_n d_{n-1} = \frac{F_0}{F_1} d_{n-1}$$

$$= \frac{F_0}{F_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} d_{n-2} = \frac{F_0}{F_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} d_{n-3}$$

$$= \frac{F_0}{F_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} \cdots \frac{F_{n-1}}{F_n} d_0$$

$$= \frac{d_0}{F_n}$$

وبالتالي

$$\frac{2d_0}{F_n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n > \frac{2d_0}{\varepsilon}} \quad **$$

ملاحظة:

إما أن تقطع n مباشرة أو تُسبه من من خلال العلاقة

$**$

خطوات طريقة فيبوناتشي:

① نعرف $f(x)$, المجال الابتدائي $[a,b]$

② نقطع n مباشرة أو نحسب من العلاقة

$$F_n > \frac{2(b-a)}{\varepsilon} \qquad d_0 = b-a$$

ثم نوجد متتالية أعداد فيبوناتشي

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$$

③ $d = b - a$

④ من أجل $K = 1, 2, \ldots, n$

$$d_{K+1} = d_K \frac{F_{n-K}}{F_{n-K+1}}$$

[1]

[2] $x_1 = b - d$

$x_2 = a + d$

[3] إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$

عندئذ $b = x_2$, $a = a$

وإلا:

$b = b$, $a = x_1$

$d = b - a$

مثال:

أوجد $\min_{x \in [0,2]} f(x)$

بحيث أن:

$f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$

على أن يكون طول المجال النهائي أقل من $\varepsilon = 0,9$

/ /

أكل : نجد n من العلاقة :

$$F_n > \frac{2(b-a)}{\varepsilon} \quad (2)$$

$$F_n > \frac{2(2-0)}{0,9} = \frac{4}{0,9} = \frac{40}{9} = 4,4$$

$$F_n > 4,4 \iff n = 4$$

$F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2$

$F_3 = 3 \quad F_4 = 5$

$$d = b - a = 2 \quad (3)$$

$n = 4$ ، $k = 1$ (4)

$$d_1 = d_0 \frac{F_3}{F_4} = 2 \cdot \frac{3}{5} = 1,2$$

$x_1 = b - d_1 = 2 - 1,2 = 0,8$

$x_2 = a + d_1 = 0 + 1,2 = 1,2$

$f(x_1) = f(0,8) = -24,3584$

$f(x_2) = f(1,2) = -19,7184$

$f(x_1) \leq f(x_2)$

$a = 0 \quad b = x_2 = 1,2$

والمجال الجديد هو $[0, 1.2]$

في الأصل $k = 2$

$d = 1,2 - 0 = 1,2$

$d_2 = d_1 \frac{F_2}{F_3} = \frac{2}{3}(1,2) = 0,8$

$x_2 = a + d_2 = 0 + 0,8 = 0,8$

$x_1 = b - d_2 = 1,2 - 0,8 = 0,4$

$f(x_1) = f(0,4) = -19,2704$

$f(x_2) = f(0,8) = -24,3584$

$f(x_1) > f(x_2)$

$a = x_1 = 0,4$

$b = b = 1,2$

المجال الجديد هو $[0.4, 1.2]$

في الأصل $k = 3$

$d = 1,2 - 0,4 = 0,8$

$d_3 = d \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2} 0.8 = 0,4$

$x_1 = b - d_3 = 1,2 - 0,4 = 0,8$

$$x_2 = a + d_3 = 0,4 + 0,4 = 0,8$$

$$x_1 = x_2$$

نتوقف هنا

اكل الاشكال ما هو

طريقة نيوتن:

وهي طريقة تعتمد على مجموعة من الخطوات التكرارية حيث أننا وعند كل تكرار نقوم بحساب $f(x_{1k})$, $f'(x_{1k})$, $f''(x_{1k})$

نعرف الدالة التربيعية المستنتجة من منشور تايلور للدالة f

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2$$

نلاحظ أن

$$q(x_k) = f(x_k)$$

$$q'(x_k) = f'(x_k)$$

$$q''(x_k) = f''(x_k)$$

لذلك نحاول بتقريب مقبول وإيجاد

$\min f(x)$ بدلاً من $\min q(x)$

وبالتالي $q'(x) = 0$

$$\Rightarrow f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$\Rightarrow x = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

بوضع $x = x_{k+1}$ نجد أن:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

خطوات الخوارزمية:

① نعرف $f(x), f'(x), f''(x)$ و القيمة الابتدائية x_0 وشرط التوقف ε.

② $$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

③ اذا كانت القيمة المطلقة $|f'(x_{k+1}) - f'(x_k)| < \varepsilon$ أو $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ نتوقف وإلا نعود إلى (2)

انتهت المحاضرة