كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

# التمرين الأول:

ليكن $S$ و $T$ مؤثرين خطيين ومحدودين ومتوافقين ذاتياً على فضاء هلبرت $H$ وكان $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين فتبين ان $M = \alpha S + \beta T$ متوافق ذاتياً

الحل:

$$M^* = (\alpha S + \beta T)^* = (\alpha S)^* + (\beta T)^*$$
$$= \alpha S^* + \beta T^* = \alpha S + \beta T = M$$

$\Leftarrow M$ متوافق ذاتياً

# التمرين الثاني:

ليكن $T$ مؤثراً خطياً محدداً على $H$، أثبت ان المؤثرين

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \\ T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*) \end{cases}$$

متوافقين ذاتياً ثم بين أن:

$$T = T_1 + iT_2$$

$$T^* = T_1 - iT_2$$

اكل:

$$T_1^* = \left(\frac{1}{2}(T+T^*)\right)^* = \frac{1}{2}(T+T^*)^* = \frac{1}{2}(T^*+(T^*)^*)$$

$$= \frac{1}{2}(T^*+T) = T_1$$

$$T_2^* = \left(\frac{1}{2i}(T-T^*)\right)^* = -\frac{1}{2i}(T-T^*)^* = -\frac{1}{2i}(T^*-T)$$

$$= \frac{1}{2i}(T-T^*) = T_2$$

لدينا:

$$T_1 = \frac{1}{2}(T+T^*) \Rightarrow 2T_1 = T+T^* \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{1}{2i}(T-T^*) \Rightarrow T-T^* = 2iT_2 \quad (2)$$

بجمع (1) مع (2):

$$2T = 2T_1 + 2iT_2$$

$$\Rightarrow T = T_1 + iT_2$$

بطرح نجد ان:

$$2T^* = 2T_1 - 2iT_2$$

$$\Rightarrow T^* = T_1 - iT_2$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

# التمرين الثالث:

$S,T$ مؤثرين ناظميين. كمقان الاداة

$ST^* = T^*S$ و $TS^* = S^*T$

فتبين أن: $S+T$ ناظمي

$ST$ ناظمي

الحل:

$S$ ناظمي $\Leftarrow SS^* = S^*S$

$T$ ناظمي $\Leftarrow TT^* = T^*T$

$$(S+T)(S+T)^* = (S+T)(S^*+T^*) = SS^* + ST^* + TS^* + TT^*$$

$$= S^*S + TS + S^*T + T^*T = (S^*+T^*)S + (S^*+T^*)T$$

$$= (S^*+T^*)(S+T)$$

$\Leftarrow S+T$ ناظمي

$$(ST)(ST)^* = (ST)(T^*S^*) = S(TT^*)S^*$$

$$= S(T^*T)S^* = (T^*S)(TS^*) = (T^*S)(S^*T)$$

$$= T^*(SS^*)T = T^*S^*ST = (ST)^*(ST)$$

$\Leftarrow ST$ ناظمي



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

# التمرين الرابع:

$H$ فضاء هلبرت عقدي $T: H \longrightarrow H$

مؤثر خطياً محدوداً متباين، المطلوب:

① أثبت ان $(T^*)^{-1}$ موجود

② $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

الحل: ①

$T^* x = 0 \overset{??}{\Rightarrow} x = 0$

$\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^* x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$

$\langle Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$

$T = 0 \Rightarrow Tx = 0$

لأن $T$ متباين $\Rightarrow x = 0$

نستنتج ان $T^*$ متباين $\Leftarrow$ $(T^*)^{-1}$ موجود

② $T^{-1}T = I$

$(T^{-1}T)^* = I^* = I$

$T^*(T^{-1})^* = I$

$TT^{-1} = I$

$(TT^{-1})^* = I^* = I$

$(T^{-1})^* T^* = I$

$\Rightarrow (T^{-1})^* T^* = T(T^{-1})^* = I$

$\Rightarrow (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z