كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

2025/5/17

المحاضرة الأولى

عملي

* السؤال الأول :

ليكن $x_n \to x$ & $y_n \to y$ في فضاء ضـ ا داخلي X فإن

$\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$

الإثبات :

$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \geq 0$

$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle|$

$= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|$

$= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle|$

$\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle|$ صيغ واسي العلبة

$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|$

≤ 0

بالتالي

$0 \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq 0$

ومنه

$\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$

$n \to +\infty$

* السؤال الثاني :

X فضاء ضـ ا عقدي فأثبت أن

① $\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

② $\mathrm{Im}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

الإثبات :

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$

$P_2 = \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle\right)$ ①

$= \frac{1}{4}\left(\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle\right)$

$= \frac{\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}}{2}$

$= \frac{2}{2}\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$

$P_2 = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)$ ②

$= \frac{1}{4}\left(\langle x+iy, x-iy \rangle - \langle x-iy, x-iy \rangle\right)$

$\bar{i} = \overline{\alpha} = -i$ (لأنه موجود في الطرفين)

$= \frac{1}{4}\left(\langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + i\bar{i}\langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle\right)$

$\forall x,y,z \in (\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: الحل

1) $\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)\overline{z_i}$

$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \overline{z_i} + y_i \overline{z_i})$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i}$

$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

2) $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)\overline{y_i}$

$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \alpha \langle x, y\rangle$

3) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$\overline{\langle y, x\rangle} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$= \langle x, y\rangle$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

4) $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

5) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$

$\Leftrightarrow |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$\Leftrightarrow x = 0$ $x = (0, 0, \ldots, 0)$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء داخلي

$= \frac{1}{4}(+2i\langle y, x\rangle - 2i\langle x, y\rangle)$

$= +\frac{1}{2}(-i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle)$

$= -\frac{1}{2}(i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle)$

$= \frac{i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle}{2i^2}$ $\quad i^2 = -1$

$= \frac{\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle}{2i}$

$= \frac{\langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle}}{2i} = \frac{Im\langle x, y\rangle}{}$

* السؤال الثالث :

ليكن $X = \mathbb{C}^n$ فضاء شعاعي فوق الحقل العددي K ، وليكن لدينا التطبيق $\langle\cdot,\cdot\rangle$ معرف بالشكل :

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to K$

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

أثبت أن $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء داخلي تام

/ /

اثبات ان $\mathbb{C}^n$ فضاء تام:

ليكن $(x_r)_{r\geq 1}$ متتالية كوشي في $\mathbb{C}^n$

أي: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$; $\forall r,m \geq N(\varepsilon)$ $\|x_r - x_m\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|x_r - x_m\|^2 < \varepsilon^2$

① $\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2\right]$

$|x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$

من اجل كل $i = \overline{1,n}$

$|x_i^{(r)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$

وبما أن $x_i^{(m)}$ متتالية لكوشي في $\mathbb{C}$

فـ $\mathbb{C}$ هو فضاء تام بالتالي هي متقاربة من نقطة منه هي $x_i \in \mathbb{C}$

بالعودة إلى العلاقة ①:

$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$

نجعل $m \to \infty$ عندئذ فان

$x_i^{m} \to x_i$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i|^2 < \varepsilon^2$

$\forall r > N(\varepsilon)$

$\|x_r - x\|^2 \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \|x_r - x\| < \varepsilon \quad \forall r \geq N(\varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$

$x_r \to x \in \mathbb{C}^n$

بالتالي كل متتالية لكوشي في $\mathbb{C}^n$ متقاربة من نقطة منه عندئذ $\mathbb{C}^n$ فضاء جديد لأنه فضاء جداء داخلي وتام

* السؤال الرابع:

X فضاء جداء داخلي حقيقي

$\|x\| = \|y\|$

عندئذ: $\langle x+y, x-y \rangle = 0$

الإثبات:

$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle$

$+ \langle y, x \rangle + \langle y, -y \rangle$

$= -\langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle = 0$

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

$\langle y, -y \rangle = -\langle y, y \rangle = -\|y\|^2 = -\|x\|^2$

انتهت المحاضرة