كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مبرهنة:

اذا كان $<v_1,w> = <v_2,w>$
اياً كان w من فضاء جداء داخلي X فإن $v_1 = v_2$

* بشكل خاص:
اذا تحققت المساواة $<v_1,w>=0$
أياً كان $w \in X$ (عنصر مثبت)
فإن $v_1 = 0$

مبرهنة:

ليكن X و Y فضاءي جداء داخلي و

$$T: X \longrightarrow Y$$

مؤثراً خطياً محدوداً عندئذٍ لدينا ما يلي:

① أياً كان $x \in X$ و $y \in Y$ فإن
$$T=0 \Leftrightarrow <Tx,y>=0$$

② اذا كان $T: X \to X$ حيث X عقدي، وكان $<Tv,v>=0$ اياً كان $v \in X$ فإن $T=0$

تعريف:

يُقال عن المؤثر الخطي والمحدود $T: H \longrightarrow H$ في فضاء هلبرت H بأنه مترافق ذاتياً إذا كان

$$T = T^*$$

مبرهنة الترافق الذاتي:

ليكن $T: H \to H$ مؤثراً خطياً محدوداً على فضاء هلبرت H عندئذٍ: هام

① اذا كان T مترافق ذاتياً فإن $<Tx,x>$ حقيقي اياً كان $x \in H$

② اذا كان H عقدياً [مبني فوق حقل الأعداد العقدية]، و كان $<Tx,x>$ حقيقي كان T مترافق ذاتياً اياً كان $x \in H$

الإثبات:

① لدينا T مترافق ذاتياً
أي $T = T^*$

$\overline{<Tx,x>} = <x,T^*x>$
حسب خواص T^*
$= \overline{<x,Tx>} = <Tx,x>$

$\Leftarrow$ $<Tx,x>$ حقيقي اياً كان $x \in H$

② لدينا $<Tx,x>$ حقيقي لكل $x \in H$

$<Tx,x> = \overline{<Tx,x>}$

$= \overline{<x,T^*x>} = <T^*x,x>$
حسب تعريف المؤثر المرافق
حسب خواص الجداء الداخلي

$\Rightarrow <Tx,x> - <T^*x,x> = 0$

$$\langle Tx - T^*x, x \rangle = 0$$

$$\langle (T - T^*)x, x \rangle = 0$$

بما أن H عقدي

$$\Rightarrow T - T^* = 0 \Rightarrow T = T^*$$

أي T مترافق ذاتياً

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي كي يكون مركب مؤثرين خطيين مترافقين ذاتياً S و T محدودين على فضاء هلبرت H مترافق ذاتياً هو أن يكون هذان المؤثران تبادليان (قابلان للمبادلة)

$$ST = TS$$

الإثبات:

[⇐] T, S مترافقين ذاتياً أي $S = S^*$ & $T = T^*$ ولنثبت أن $ST = TS$ و ST مترافق ذاتياً.

$$(ST)^* = T^*S^* = TS = ST$$

⇐ ST مترافق ذاتياً

$$(TS)^* = S^*T^* = ST = TS$$

⇐ TS مترافق ذاتياً

[⇒] S, T مترافقين ذاتياً و ST مترافق ذاتياً ولنبرهن أن

$$ST = TS$$

$$ST = (ST)^* = T^*S^* = TS$$

وهو المطلوب

ملاحظة:

الفضاء المتجهي $B(X,X)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية والمحدودة من فضاء منظم X في الفضاء نفسه يُعرّف عليه نظيم بالشكل:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$$

مبرهنة: [متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتياً]

لتكن T_n متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة والمترافقة ذاتياً

$$T_n : H \to H$$

على فضاء هلبرت H، لنفترض أن T_n متقاربة من T أي أن

$$\|T_n - T\| \to 0$$

حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم على فضاء $B(X,X)$ عندئذ تكون النهاية T مؤثر مترافق ذاتياً على H

تعريف:

يُقال عن المؤثر الخطي والمحدود $T : H \to H$ على فضاء هلبرت H

بأنه مؤثر واحدي اذا حقق الشروط التالية :

① T غامر ② T متباين

③ $T^* = T^{-1}$

هام

مبرهنة :

$$T: H \to R(T) = H$$

مؤثر خطي ومحدود على فضاء هلبرت H

T واحدي $\Longleftrightarrow$ $\|Tx\| = \|x\|$

الإثبات:

[⇐] T واحدي عندئذٍ $T^* = T^{-1}$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle$$

$$= \langle x, T^{-1}Tx\rangle = \langle x, Ix\rangle = \langle x, x\rangle$$

$$= \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|Tx\| = \|x\|$$

[⇒] لدينا $R(T) = H$ ⇐ T غامر

* نثبت التباين

$$\forall x \in H: \; Tx = 0 \overset{?}{\Rightarrow} x = 0$$

$$Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\| = \|0\| \Rightarrow \|x\| = 0$$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ T متباين

* نثبت ان $T^* = T^{-1}$

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$$

$$\Rightarrow \langle T^*Tx - Ix, x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow T^*T - I = 0 \Rightarrow T^*T = I$$

* $TT^* = TT^*(T T^{-1}) = T(T^*T)T^{-1}$

$$= TIT^{-1} = TT^{-1} = I$$

$$\Rightarrow T^*T = TT^* = I$$

$$\Rightarrow T^* = T^{-1}$$

مما سبق نجد ان T واحدي

ملاحظة :

اذا كان T مؤثر واحدي عندئذٍ

$$\|T\| = 1$$

الإثبات:

T مؤثر واحدي ⇐

$$\|Tx\| = \|x\|$$

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 1$$

⇐ $\|T\| = 1$

ملاحظة:

ليكن T مؤثر واحدي عندئذٍ T^{-1} مؤثر واحدي

الإثبات:

T مؤثر واحدي ⟸ T غامر ومتباين ⟸ T^{-1} غامر ومتباين

* بقي ان نبرهن ان

$$(T^{-1})^{-1} = (T^{-1})^{*} \qquad g^{-1} = g^{*}$$

$$(T^{-1})^{*} = (T^{*})^{-1} = T = (T^{-1})^{-1}$$

وهو المطلوب

ملاحظة:

$U: H \to H$ مؤثر واحدي

$V: H \to H$ مؤثر واحدي

عندئذٍ UV مؤثر واحدي

الإثبات:

UV مؤثر متباين وغامر

$$(UV)^{*} = V^{*}U^{*} = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

⟸ UV واحدي

ملاحظة:

اذا كان $T: H \to H$ مؤثر واحدي عندئذٍ

$$\langle Tf, Tg \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in H$$

الإثبات:

$$\langle Tf, Tg \rangle = \langle f, T^{*}Tg \rangle$$

$$= \langle f, T^{-1}Tg \rangle = \langle f, g \rangle$$

تعريف:

يُقال عن المؤثر الخطي $T: H \to H$ والمحدود على فضاء هلبرت H انه ناظمي اذا كان

$$T^{*}T = TT^{*}$$

ملاحظة:

① كل مؤثر مترافق ذاتياً هو مؤثر ناظمي

② كل مؤثر واحدي هو مؤثر مترافق ذاتياً

مبرهنة:

$T: H \to H$ مؤثر خطي ومحدود على فضاء هلبرت H العقدي عندئذٍ

T ناظمي ⟺ $\|T^{*}x\| = \|Tx\|$ أياً كان x من H

انتهت المحاضرة

عملي

2025/5/17 المحاضرة الأولى

* السؤال الأول:

ليكن $x_n \to x$ & $y_n \to y$

في فضاء جداء داخلي X

فإن $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$

الإثبات:

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \overset{?}{=} 0$

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle|$

$= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$

$= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|$

من خواص القيمة المطلقة

$\le |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$

$\le \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|$

≤ 0

بالتالي

$0 \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le 0$

ومنه

$\lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$

* السؤال الثاني:

X فضاء جداء عقدي فأثبت أن

① $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

② $Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

الإثبات: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$P_2 = \frac{1}{4}(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle)$ ①

$= \frac{1}{4}(\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$- \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle)$

$= \frac{1}{4}(2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle)$

$= \frac{\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}}{2}$

$= \frac{2}{2} Re\langle x, y\rangle = Re\langle x, y\rangle$

$P_2 = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$ ②

$= \frac{1}{4}(\langle x+iy, x-iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle)$

$\bar{i} = \bar{\alpha} = -i$ (لأنو موجودة في الثانية)

$= \frac{1}{4}(\langle x, x\rangle - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle + i\bar{i}\langle y, y\rangle$

$- \langle x, x\rangle - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle$

$$= \frac{1}{4}\left(+2i<y,x> - 2i<x,y>\right)$$

$$= +\frac{1}{2}\left(-i<x,y> + i<y,x>\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(i<x,y> - i<y,x>\right)$$

$$= \frac{i<x,y> - i<y,x>}{2i^2} \qquad i^2=-1$$

$$= \frac{<x,y> - <y,x>}{2i}$$

$$= \frac{<x,y> - \overline{<x,y>}}{2i} = Im<x,y>$$

السؤال الثالث : *

ليكن $X = \mathbb{C}^n$ فضاء شعاعي فوق الحقل العددي K، وليكن لدينا التطبيق $<\cdot,\cdot>$ معرف بالشكل:

$$<\cdot,\cdot> : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow K$$

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

أثبت أن $(\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>)$ فضاء هلبرت

جداء داخلي   تام

الحل : $\forall x,y,z \in (\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>)$

$\boxed{1}$ $$<x+y,z> = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)\bar{z}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i\bar{z}_i + y_i\bar{z}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{z}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{z}_i$$

$$= <x,z> + <y,z>$$

② $$<\alpha x,y> = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)\bar{y}_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i = \alpha<x,y>$$

$\boxed{3}$ $$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$$

$$\overline{<y,x>} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i\bar{x}_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$$

$$= <x,y>$$

$$\Rightarrow <x,y> = \overline{<y,x>}$$

$\boxed{4}$ $$<x,x> = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0 \; ; \quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n), \; y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

$\boxed{5}$ $$<x,x>=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i=1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \qquad x=(0,0,\dots,0)$$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{C}^n, <\cdot,\cdot>)$ فضاء جداء داخلي

اثبات ان $\mathbb{C}^n$ فضاء تام:

لتكن $(x_r)_{r\geq 1}$ متتالية لكوشي في $\mathbb{C}^n$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0 ;$

$\|x_r - x_m\| < \varepsilon ,\ \forall r,m \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \|x_r - x_m\|^2 < \varepsilon^2$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2\right] \quad (1)$$

$|x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$

من اجل كل $i=\overline{1,n}$

$|x_i^{(r)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$

وبما أن $x_i^{(m)}$ متتالية لكوشي في $\mathbb{C}$

و $\mathbb{C}$ هو فضاء تام بالتالي هي متقاربة من نقطة ما هي $x_i \in \mathbb{C}$

بالعودة إلى العلاقة (1):

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$

نجعل $m \to \infty$ عندئذ فإن

$x_i^{m} \to x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i|^2 < \varepsilon^2$$

$\forall r > N(\varepsilon)$

$\|x_r - x\|^2 \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \|x_r - x\| < \varepsilon \quad \forall r \geq N(\varepsilon)$

$x_r \to x \in \mathbb{C}^n$

بالتالي كل متتالية لكوشي في $\mathbb{C}^n$ متقاربة من نقطة منه

عندئذ $\mathbb{C}^n$ فضاء هلبرت لأنه فضاء جداء داخلي وتام

* السؤال الرابع:

X فضاء جداء داخلي حقيقي

$\|x\| = \|y\|$

عندئذ: $\langle x+y, x-y\rangle = 0$

الإثبات:

$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle$

$+ \langle y, x\rangle + \langle y, -y\rangle$

$= -\langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle = 0$

$\langle x, x\rangle = \|x\|^2$

$\langle y, -y\rangle = -\langle y, y\rangle = -\|y\|^2 = -\|x\|^2$

انتهت المحاضرة