كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي٢

المحاضرة : ٢+١ /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

2025/5/8

المحاضرة الأولى

* فضاء الجداء الداخلي :

ليكن X فضاء شعاعي فوق الحقل K ، الجداء الداخلي على فضاء شعاعي X هو تطبيق $\langle \cdot , \cdot \rangle$ من $X \times X$ في الحقل K ومرمز له بالرمز $\langle \cdot , \cdot \rangle$ بحيث تتحقق الشروط الآتية :

$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow K$

$\forall x, y, z \in X , \alpha \in K$

1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ مرافق

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ملاحظة :

في حالة $K = \mathbb{R}$ عندئذ

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} = \langle y, x \rangle$

بما أن الحقل حقيقي

مرافق العدد الحقيقي هو نفسه

فضاء الجداء الداخلي :

هو فضاء شعاعي X مزود بجداء داخلي معرف على X أي $(X, \langle \cdot , \cdot \rangle)$

مثال :

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي بحيث

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

ملاحظة :

- كل جداء داخلي على X نظيماً بالعلاقة

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

ملاحظة :

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم

ملاحظة :

كل جداء داخلي على X متركماً بالعلاقة

$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$

ملاحظة :

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء متري

K يرمز الأعداد العقدية والحقيقية
$\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$

* خواص أخرى للجداء الداخلي.

X فضاء متجهي فوق الحقل K
$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي عندئذ:

$\forall x, y, z \in X \quad \alpha, \beta \in K$

(1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

الإثبات:

$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle \overset{\text{حسب ①}}{=} \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle$

$= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

(2) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

الإثبات:

$\langle x, \alpha y \rangle \overset{\text{حسب ③}}{=} \overline{\langle \alpha y, x \rangle} \overset{\text{حسب ②}}{=} \overline{\alpha \langle y, x \rangle}$

$= \overline{\alpha} \, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

(3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$

الإثبات:

$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{③}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle}$

$\overset{①}{=} \overline{\langle \alpha y, x \rangle + \langle \beta z, x \rangle}$

$= \overline{\alpha} \langle y, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, x \rangle$

$= \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$

(4) $\langle x, 0 \rangle = 0$

الإثبات:

حسب ③ من الخواص الأخرى للجداء الداخلي نأخذ $\alpha = \beta = 1$

$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

نأخذ $y = 0$ نجد

$\langle x, z \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle x, z \rangle$

$\Rightarrow \langle x, 0 \rangle = 0$

(5) $\langle 0, x \rangle = 0$

الإثبات:

من ④ بالخواص الأخرى

$\langle x, 0 \rangle = 0 \Rightarrow \overline{\langle x, 0 \rangle} = \overline{0}$

$\Rightarrow \langle 0, x \rangle = 0$

* التعامد في فضاء الجداء الداخلي:

تعريف:

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي و ليكن $x, y \in X$

① يقال عن العنصرين x, y أنهما متعامدان إذا كان $\langle x, y \rangle = 0$

ونرمز لذلك بـ $x \perp y$

② يُقال عن العنصر $x \in X$ انه متعامد مع المجموعة A في X اذا كان $x \perp a$ أيا كان $a \in A$

③ يُقال عن المجموعة A انها متعامدة مع المجموعة B في X اذا كان $a \perp b$ لكل $a \in A$, $b \in B$

* من اصيغ سوارتز (شفارتز) لكي $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي عندئذ:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

* تمرين:

لتكن $X = \mathbb{R}_2[x]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة الثانية على الاكثر، المعرفة على حقل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ اي ان

$$X = \{f(x) = ax^2 + bx + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

المطلوب:

① اثبت ان التطبيق

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall f, g \in X$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$$

جداء داخلي

② اوجد $\|f\|$ حيث $f(t) = t^2$

اوجد $\|g\|$ حيث $g(t) = t - \frac{3}{4}$

③ هل $f(t) = t^2$, $g(t) = t - \frac{3}{4}$ متعامدان

الحل: ①

① $\langle f+g, h \rangle \overset{?}{=} \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

$$\langle f+g, h \rangle = \int_0^1 (f+g)(t) . h(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 (f(t) . h(t)) + (g(t) . h(t)) \, dt$$

$$= \int_0^1 f(t) . h(t) \, dt + \int_0^1 g(t) . h(t) \, dt$$

$$= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

② $\langle \alpha f, g \rangle \overset{?}{=} \alpha \langle f, g \rangle$

$$\langle \alpha . f, g \rangle = \int_0^1 (\alpha f)(t) \, g(t) \, dt$$

$$= \alpha \int_0^1 f(t) \, g(t) \, dt = \alpha \langle f, g \rangle$$

③ $\langle f, g \rangle \overset{?}{=} \overline{\langle g, f \rangle}$

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int_0^1 g(t) \, f(t) \, dt}$$

$$= \int_0^1 \overline{g(t) \, f(t)} \, dt$$

$$\|g\| = \sqrt{\frac{7}{48}}$$

③ يكون f و g متعامدان اذا كان $\langle f,g\rangle = 0$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^3 - \frac{3}{4}t^2\,dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{3t^3}{12}\right]_0^1 = 0$$

f و g متعامدان $\Leftarrow$

* مبرهنة فيثاغورث:

ليكن X فضاء جداء داخلي و $x \perp y$ عندئذ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

البرهان:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$= 0$ لأن $x \perp y$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$= \int_0^1 g(t)\cdot f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

$$= \langle f,g\rangle$$

④ $\langle f,f\rangle \geq 0$?

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geq 0$$

⑤ $\langle f,f\rangle = 0$?

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow f^2(t) = 0 \Rightarrow f(t) = 0$$

② $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5}$$

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

* $\|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \int_0^1 g^2(t)\,dt$

$$= \int_0^1 \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 dt = \left[\frac{\left(t-\frac{3}{4}\right)^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{48}$$

2025 / 5 / 15

المحاضرة الثانية

ملاحظة:

علاقة فيثاغورث في $\mathbb{R}^n$

ليكن $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)$ فضاء جداء داخلي و $x_1, \dots, x_n$ متعامدة مثنى مثنى عندئذ:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

انتهت المحاضرة الأولى

 # مبرهنة:

من أجل أي عنصرين x, y من فضاء جداء الداخلي X لدينا

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

علاقة متوازي الأضلاع

الإثبات:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\textcircled{1} \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle$$

$$\textcircled{2} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

بجمع ① و ② نجد المطلوب

تعريف: فضاء هلبرت

فضاء هلبرت هو فضاء جداء داخلي تام

مثال: $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ فضاء هلبرت

ملاحظة:

كل فضاء هلبرت هو فضاء باناخ

أما العكس فغير صحيح بالعموم

ملاحظة:

ℓ^p $(1 \le p < \infty)$ هو فضاء متتاليات من الشكل (x_r)

$x_r = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots)$

بحيث تكون السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(r)}|^p < \infty$

ملاحظة: $\ell^p_{p \neq 2}$ ليس فضاء هلبرت

لإثبات ذلك نأخذ المثال الآتي:

$x = (1,1,0,0,\dots) \in \ell^p$

$y = (1,-1,0,0,\dots) \in \ell^p$

نعلم أن الفضاء المعرف على ℓ^p نعطى بالعلاقة

$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

* $\|x\| = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$

* $\|y\| = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$

$x+y = (2,0,0,\dots)$

$\Rightarrow \|x+y\| = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2$

* $x-y = (0,2,0,\dots)$

$\Rightarrow \|x-y\| = 2$

* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8$

* $2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

$= 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right) = 4 \times 2^{\frac{2}{p}}$

نلاحظ عندما $p \neq 2$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

بالتالي علاقة متوازي الأضلاع غير محققة من أجل p

ومنه $\ell^p_{p \neq 2}$ ليس فضاء جداء داخلي، بالتالي ليس فضاء هلبرت

مثال:

الفضاء $c[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي، وبالتالي ليس فضاء هلبرت

الإثبات:

لدينا $c[a,b]$ فضاء منظم ويعرف عليه النظيم بالعلاقة:

$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$

يكفي أن نثبت بأن علاقة متوازي الأضلاع غير محققة من أجل نثبت بأن $c[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي

الصيغة الخطية مرة، نصف مرة:

ليكن X ، Y فضاءين متجهيين فوق الحقل K نسمي التطبيق

$$h: X \times Y \longrightarrow K$$

صيغة خطية مرة، نصف مرة على $X \times Y$ إذا تحققت الشروط:

$\forall x, x_1, x_2 \in X$

$y, y_1, y_2 \in Y$; $\alpha \in K$.

① $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

② $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

③ $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

④ $h(x, \alpha y) = \bar{\alpha} h(x, y)$

مثال:

ليكن لدينا $X = Y = \mathbb{R}^3$

$$h: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(u, v) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

حيث $u(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $v(y_1, y_2, y_3)$

عندئذ h صيغة خطية مرة، نصف مرة إذا:

① $h(u_1 + u_2, v) \overset{??}{=} h(u_1, v) + h(u_2, v)$

$$T_1 = h\big((x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3)\big)$$

Nehad S A 2 B B A G H

لنأخذ $x(t) = 1 \in C[a,b]$

$$y(t) = \frac{t-a}{b-a} \in C[a,b]$$

$\|x\| = 1$

$\|y\| = \max|y(t)| = 1$

$a \le t \le b$

$y(t)$ معرف على $[a,b]$ ،

$y(a) = 0$ ، $y'(t) = \frac{1}{b-a}$

$y(b) = 1$

t	a		b
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	1

$* \; x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$

نأخذ ونوحد المقام $\|x(t) + y(t)\| = 2$

$* \; x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$

$\|x - y\| = 1$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$

بالتالي علاقة متوازي الأضلاع غير محققة وبالتالي $[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي.

وبالتالي ليس فضاء هلبرت

④ $h(u, \alpha v) = \overline{\alpha}\, h(u, v)$

$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\alpha} = \alpha$

$T_1 = h((x_1, x_2, x_3), (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3))$

$= x_1(\alpha y_1) + x_2(\alpha y_2) + x_3(\alpha y_3)$

$= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$

$= \alpha\, h(u, v)$

من الشروط الأربعة نجد أن h تعرّف صيغة خطية مرّة، ضف المرة على $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

مثال:

$h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$h(u, v) = x_2 - y_1$

$u(x_1, y_1)\ ,\ v(x_2, y_2)\ ,\ w(x_3, y_3)$

لا تعرّف صيغة خطية مرة واحدة المرة

الحل:

① $h(u+v, w) = h((x_1+x_2, y_1+y_2), (x_3, y_3))$

$= x_3 - (y_1 + y_2)$

$h(u, w) = h((x_1, y_1), (x_3, y_3))$

$= x_3 - y_1$

$= h((x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3'), (y_1, y_2, y_3))$

$= (x_1+x_1')y_1 + (x_2+x_2')y_2 + (x_3+x_3')y_3$

$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + (x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3)$

$= h(u_1, v) + h(u_2, v)$

② $h(u, v_1+v_2) \overset{??}{=} h(u, v_1) + h(u, v_2)$

$T_1 = h((x_1, x_2, x_3), (y_1+y_1', y_2+y_2', y_3+y_3'))$

$= x_1(y_1+y_1') + x_2(y_2+y_2') + x_3(y_3+y_3')$

$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + (x_1 y_1' + x_2 y_2' + x_3 y_3')$

$= h(u, v_1) + h(u, v_2)$

$v_1(y_1, y_2, y_3) \quad v_2(y_1', y_2', y_3')$

③ $h(\alpha u, v) \overset{??}{=} \alpha\, h(u, v)$

$T_1 = h((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), (y_1, y_2, y_3))$

$= \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3$

$= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = \alpha\, h(u, v)$

$* \; h(v,w) = h((x_2,y_2),(x_3,y_3))$

$= x_3 - y_2$

$\Rightarrow h(u,w) + h(v,w) = 2x_3 - y_2 - y_1$

$\neq h(u+v,w)$

وعليه h لا تعرّف صيغة خطية مرة وضف المرة على $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

ملاحظة:

ليكن X , Y فضاءين منظمين

h صيغة خطية مرة وضف المرة على المجموعة $X+Y$ عندئذٍ إذا وجد ثابت $c>0$ بحيث أن

$$|h(x,y)| \le c\,\|x\|\cdot\|y\|$$

عندئذٍ h محدود كما يسمى العدد

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\in X\setminus\{0\}\\ y\in Y\setminus\{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |h(x,y)|$$

بتعميم h

ملاحظة:

$$|h(x,y)| \le \|h\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$$

مبرهنة: [تمثيل ريس]

ليكن H_1 , H_2 فضاءين لهلبرت

و ليكن $h: H_1 \times H_2 \to K$

صيغة محدودة وخطية مرة وضف المرة عندئذٍ يكون لـ h التمثيل

$h(x,y) = \langle Sx, y\rangle$

حيث $S: H_1 \to H_2$

مؤثر خطي ومحدود ويتعين بصورة وحيدة بدلالة h وتحقق بعض بالمساواة $\|S\| = \|h\|$

ملاحظة:

الجداء الداخلي صيغة خطية مرة وضف المرة

مؤثر هلبرت المرافق:

ليكن H_1 , H_2 فضاءين لهلبرت و ليكن $T: H_1 \to H_2$ مؤثراً خطياً محدوداً عندئذٍ يكون مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T هو المؤثر $T^*: H_2 \to H_1$ بحيث تتحقق المساواة:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

$\forall x \in H_1 \,,\; y \in H_2$

مبرهنة الوجود:

مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T موجود ووحيد وهو مؤثر خطي ومحدود ونظيمه يتعين بالمساواة $\|T^*\| = \|T\|$

/ /

مبرهنة : هام

خواص مؤثر هلبرت الموافق :

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، ولتكن

$S: H_1 \to H_2$, $T: H_1 \to H_2$

مؤثرين خطيين محدودين و

ليكن α عدداً ما عندئذٍ

كل ما يلي :

① $\langle T^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$

$\forall x \in H_1 , y \in H_2$

② $(S+T)^* = S^* + T^*$

③ $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

④ $T^{**} = (T^*)^* = T$

⑤ $\| T T^* \| = \| T^* T \| = \| T \|^2$

⑥ $TT^* = 0 \iff T = 0$

⑦ $(ST)^* = T^* S^*$

حيث

$H_1 = H_2 = H$

البرهان :

① $\langle T^* y, x \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

$= \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle$

② $\langle x, (S+T)^* y \rangle$

$= \langle (S+T)x, y \rangle$

$= \langle Sx + Tx, y \rangle$

$= \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle$

$= \langle x, S^* y \rangle + \langle x, T^* y \rangle$

$= \langle x, S^* y + T^* y \rangle = \langle x, (S^* + T^*) y \rangle$

$\Rightarrow (S+T)^* = S^* + T^*$

③ $\langle (\alpha T)^* y, x \rangle = \langle y, (\alpha T) x \rangle$

$= \langle y, \alpha T x \rangle = \bar{\alpha} \langle y, Tx \rangle$

$= \bar{\alpha} \langle T^* y, x \rangle = \langle \bar{\alpha} T^* y, x \rangle$

$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

④ $\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

$= \langle Tx, y \rangle$

$(T^*)^* = T \quad \forall x \in H_1$

⑤ $T^*T : H_1 \to H_1$ و $TT^* : H_2 \to H_2$

نبرهن بكل بساطة ثوارتز

$$0 \le \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle$$

T^* نقل

$$= \langle T^*Tx, x \rangle \le \|T^*T\| \cdot \|x\|^2$$

$\|TT^*x\| \le \|T^*\| \cdot \|x\|$

$\|x\| \cdot \|x\| = \|x\|^2$

بأخذ sup للطرفين عندما $\|x\| = 1$

نجد أن:

$$\|T\|^2 \le \|T^*T\| \quad ①$$

$$\|T^*T\| \le \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2 \quad ②$$

من ① و ② نجد أن

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

باستبدال T بـ T^* نجد

$$\|T^*T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$$

$\|TT^*\| =$

$$\Rightarrow \|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$$

⑥ نستنتج من (5)

⑦ $\langle x, (ST)^* y \rangle = \langle (ST)x, y \rangle$

$$= \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle$$

$$= \langle x, (T^*S^*)y \rangle$$

$$\Rightarrow (ST)^* = T^*S^*$$

مثال: ليكن لدينا المؤثر الخطي المحدود

$T : \ell_2 \to \ell_2$

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, \dots)$$

أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^*

الحل: بما أن T مؤثر خطي ومحدود

T^* موجود، وحسب العلاقة $\Leftarrow$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle (0, 4x_1, x_2, 4x_3, 0, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle$$

$$= 0\bar{y}_1 + 4x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + 4x_3\bar{y}_4 + \dots$$

$$T^*y = (z_1, z_2, z_3, \dots)$$

$$\Rightarrow \langle x, T^*y \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots), (z_1, z_2, z_3, \dots) \rangle$$

$$= x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + x_3\bar{z}_3 + \dots$$

$\bar{z}_1 = 4\bar{y}_2 \Rightarrow z_1 = 4y_2$ بالمطابقة نجد

$\bar{z}_2 = \bar{y}_3 \Rightarrow z_2 = y_3$

$\bar{z}_3 = 4\bar{y}_4 \Rightarrow z_3 = 4y_4$

$\bar{z}_4 = \bar{y}_5 \Rightarrow z_4 = y_5$

$$T^*y = (4y_2, y_3, 4y_4, y_5, 4y_6, y_7, \dots)$$

انتهت المحاضرة