كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الاستمرار في الفضاءات التبولوجية

مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً عندئذٍ:

التابع f مستمر على X إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مغلقة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مغلقة في (X,τ).

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض أن التابع f مستمر على X، لنبرهن أن الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مغلقة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مغلقة في (X,τ) .

لتكن F^* مجموعة مغلقة كيفية في الفضاء (Y,τ^*)، بالتالي إن $Y\backslash F^*\in\tau^*$ و منه حسب المبرهنة: " التابع f مستمر على X إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ) "

نجد أن $f^{-1}(Y\backslash F^*)\in\tau$ لكن $f^{-1}(Y\backslash F^*)=X\backslash f^{-1}(F^*)$ أي $X\backslash f^{-1}(F^*)\in\tau$ و هذا يعني أن $f^{-1}(F^*)$ مجموعة مغلقة في (X,τ).

$\Rightarrow$: لدينا بالفرض أن الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مغلقة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مغلقة في (X,τ) لنبرهن أن التابع f مستمر على X.

أياً كانت $G^*\in\tau^*$ فإن $Y\backslash G^*\in\mathcal{F}^*$ و منه حسب الفرض يكون $f^{-1}(Y\backslash G^*)=X\backslash f^{-1}(G^*)\in\mathcal{F}$ و هذا يعني أن $f^{-1}(G^*)\in\tau$ و بالتالي إن الصورة العكسية للمجموعة المفتوحة G^* في (Y,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ)، و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة G^* من τ^* نجد أن f مستمر على X.

مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً عندئذٍ:

يكون التابع f مستمر على X إذا و فقط إذا كان من أجل أي مجموعة جزئية A من نقاط المنطلق تتحقق علاقة الاحتواء الآتية: $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض أن التابع f مستمر على X و لنبرهن صحة الاحتواء $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$ أياً كانت A مجموعة جزئية من نقاط المنطلق:

لنفرض جدلاً أن $f(\bar{A}) \nsubseteq \overline{f(A)}$ هذا يعني وجود نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 من $\bar{A}$ بحيث أن $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$ هذا يعني بحسب تعريف النقطة اللاصقة بمجموعة وجود مجاورة V_0 للنقطة $f(x_0)$ في (Y,τ^*) بحيث يكون: $V_0 \cap f(A) = \emptyset$ بأخذ الصور العكسية وفق التابع f لطرفي العلاقة نجد أن:

$f^{-1}\big(V_0 \cap f(A)\big) = f^{-1}(V_0) \cap f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\emptyset)$ و منه:

$f^{-1}(V_0) \cap f^{-1}\big(f(A)\big) = \emptyset$ و بما أن $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ فإن:

$f^{-1}(V_0) \cap A \subseteq f^{-1}\Big(V_0 \cap f^{-1}\big(f(A)\big)\Big) = \emptyset$ أي أن $f^{-1}(V_0) \cap A = \emptyset$

و بما أن f تابع مستمر عند النقطة $x_0 \in X$ لأنه بالفرض مستمر على X فإن $f^{-1}(V_0)$ مجاورة للنقطة x_0 في (X,τ) كون V_0 مجاورة للنقطة $f(x_0)$ في (Y,τ^*)، فإن المساواة الأخيرة تعني أن $x_0 \notin \bar{A}$ و هذا يناقض الفرض و بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و الصحيح أن $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل مجموعة A جزئية من نقاط المنطلق.

$\Longleftarrow$: لدينا بالفرض أن الاحتواء (*)... $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ أياً كانت A مجموعة جزئية من نقاط المنطلق محقق و لنبرهن أن f مستمر على X .

لتكن F مجموعة مغلقة كيفية في المستقر (Y,τ^*) و لنبرهن أن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في (X,τ)، بحسب الفرض من أجل أي مجموعة A جزئية من نقاط المنطلق فإن الاحتواء (*) محقق بوضع $A = f^{-1}(F)$ أي أن $f\big(\overline{f^{-1}(F)}\big) \subseteq \overline{f\big(f^{-1}(F)\big)} \subseteq \bar{F} = F$ و منه:

$f\big(\overline{f^{-1}(F)}\big) \subseteq F$ بأخذ الصور العكسية وفق التابع f لطرفي العلاقة نجد أن:

$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}\Big(f\big(\overline{f^{-1}(F)}\big)\Big)$ لكن $f^{-1}\Big(f\big(\overline{f^{-1}(F)}\big)\Big) \subseteq f^{-1}(F) \ldots.(*)$

بالتعويض في (*) نجد أن: $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$ و الاحتواء المعاكس $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$ محقق دوماً بالتالي نستنتج أن $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ و هذا يكافئ القول إن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في (X,τ) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المغلقة F في المستقر (Y,τ^*) نجد أن f مستمر على X .

تعريف:

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ:

1. يقال عن التابع f إنه تابع مغلق إذا و فقط إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مغلقة في (X,τ) هي مجموعة مغلقة في (Y,τ^*).
2. يقال عن التابع f إنه تابع مفتوح إذا و فقط إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة

في (X,τ) هي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*).

ملاحظات و نتائج:

1. لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau=\{X,\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\}$ و لتكن $Y=\{1,2,3\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau^*=\{Y,\emptyset,\{1,3\},\{2\}\}$ و لنعرف التابع:
$f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ وفق: $f(a)=f(b)=1\ \& f(c)=f(d)=2$
لنناقش هذا التابع من حيث كونه (مستمر ، مغلق ، مفتوح):

نلاحظ أن: $f^{-1}(Y)=X\ ,f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ و
$f^{-1}(\{2\})=\{c,d\}\in\tau$ و $f^{-1}(\{1,3\})=\{a,b\}\in\tau$
بملاحظة أن الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ) نستنتج أن التابع f مستمر على X.
من ناحية ثانية نلاحظ أن $A=\{a,b\}$ مجموعة مغلقة في (X,τ) و $f(A)=\{1\}$ و هي ليست مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و لذلك فإن التابع f ليس مغلقاً.
كذلك الأمر نلاحظ أن المجموعة $A=\{a,b\}$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) و $f(A)=\{1\}$ و هي ليست مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) و لذلك فإن التابع f ليس مفتوحاً.
نستنتج من ذلك :
a. ليس من الضروري أن يكون كل تابعٍ مستمرٍ تابعاً مغلقاً.
b. ليس من الضروري أن يكون كل تابعٍ مستمرٍ تابعاً مفتوحاً.

2. لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيتين:
$\tau_1=P(X)$ و $\tau_2=\{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$ و لنعرف التابع:
$f:(X,\tau_2)\to(X,\tau_1)$ وفق: $f(x)=x\ ,\forall x\in X$، لندرس صفات التابع:
نلاحظ أن المجموعة $\{c\}\in P(X)$ فهي مجموعة مفتوحة في (X,τ_1) لكن $f^{-1}(\{c\})=\{c\}\notin\tau_2$ إذاً وجدت مجموعة مفتوحة في المستقر بحيث أن الصورة العكسية لها وفق التابع f ليست مجموعة مفتوحة في المنطلق و هذا يعني أن التابع f ليس تابعاً مستمراً على X.
من ناحية ثانية أياً كانت المجموعة المغلقة F في (X,τ_2) فإن الصورة المباشرة لها $f(F)\in P(X)$ أي أنها مجموعة مغلقة في (X,τ_1) و هذا يعني أن f تابع مغلق.

نستنتج مما سبق أنه ليس من الضروري أن يكون كل تابع مغلق مستمراً.

و بشكل مماثل نجد أنه إذا كانت T مجموعة مفتوحة كيفية في (X,τ_2) فإن $f(T)\in P(X)$ و هذا يعني أنها مجموعة مفتوحة في (X,τ_1) و بذلك يكون f تابعاً مفتوحاً

نستنتج مما سبق أنه ليس من الضروري أن يكون كل تابع مفتوح مستمراً.

مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تقابلاً كيفياً، عندئذٍ يكون التابع f مغلقاً إذا و فقط إذا كان f مفتوحاً.

إثبات:

لدينا بالفرض f تابع تقابل و مغلق و لنبين أنه تابع مفتوح: لتكن T مجموعة مفتوحة كيفية في (X,τ) عندئذٍ تكون $X\backslash T$ مجموعة مغلقة في (X,τ) و بحسب كون التابع f مغلقاً فإن $f(X\backslash T)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) لكن: $f(X\backslash T)=f(X)\backslash f(T)=Y\backslash f(T)$ أي أن $Y\backslash f(T)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و بالتالي تكون المجموعة $f(T)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المفتوحة T في (X,τ) نجد أن التابع f تابعاً مفتوحاً.

و بالعكس، لدينا فرضاً أن التابع f تقابل و مفتوح: لتكن F مجموعة مفتوحة كيفية في (X,τ) عندئذٍ تكون $X\backslash F$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) و بحسب كون التابع f مفتوحاً فإن $f(X\backslash F)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) لكن: $f(X\backslash F)=f(X)\backslash f(F)=Y\backslash f(F)$ أي أن $Y\backslash f(F)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) و بالتالي تكون المجموعة $f(F)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المغلقة F في (X,τ) نجد أن التابع f تابعاً مغلقاً.

مبرهنة:

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ يكون هذ التابع مغلقاً إذا و فقط إذا كان:

$$\overline{f(A)}\subseteq f(\bar{A}),\forall A\subseteq X$$

إثبات:

لدينا بالفرض أن f تابع مغلق و لنأخذ المجموعة الكيفية A من نقاط الفضاء التبولوجي (X,τ) نعلم أن الاحتواء الآتي $A\subseteq\bar{A}$ محقق دوماً لذا فإن $f(A)\subseteq f(\bar{A})$ بالتالي يكون $\overline{f(A)}\subseteq\overline{f(\bar{A})}$ و بما أن f تابع مغلق و $\bar{A}$ مجموعة مغلقة في (X,τ) فإن $f(\bar{A})$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) لذلك فإن: $\overline{f(A)}\subseteq f(\bar{A})$ و ذلك أياً كانت $A\subseteq X$.

و بالعكس، لدينا بالفرض أن $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A}), \forall A \subseteq X$ و لنبين أن f تابعاً مغلقاً:
لتكن F مجموعة مغلقة كيفية في (X,τ) عندئذٍ يكون $\bar{F} = F$ بالتالي $f(\bar{F}) = f(F)$
بتعويض $A = F$ في الشرط المحقق فرضاً نجد أن $\overline{f(F)} \subseteq f(\bar{F}) = f(F)$ و الاحتواء المعاكس $f(F) \subseteq \overline{f(F)}$ محقق دوماً، بالتالي $\overline{f(F)} = f(F)$ و هذا يعني أن المجموعة $f(F)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*)، و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المغلقة F في (X,τ) نستنتج أن f تابع مغلق.

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ تكون الشروط الآتية متكافئة:

1. التابع f تابع مفتوح.
2. أياً كانت المجموعة $A \subseteq X$ يتحقق الاحتواء الآتي: $f(A^\circ) \subseteq \left(f(A)\right)^\circ$.
3. إذا كانت β قاعدة للتبولوجيا τ فإن $f(B) \in \tau^*, \forall B \in \beta$.

تعريف:

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً يحقق الشروط الآتية:

1. التابع f تقابل.
2. التابع f مستمر على X.
3. التابع العكسي $y = f^{-1}$ تابع مستمر على Y.

عندئذٍ يسمى التابع f هومومرفيزم أو تابع تبولوجي أو تشاكل تبولوجي، و يسمى الفضاءان التبولوجيان (X,τ) و (Y,τ^*) في هذه الحالة فضاءين هومومرفيين، بكلام آخر: الفضاءان الهومومرفيان هما فضاءان تبولوجيان يوجد بينهما هومومرفيزم واحد على الأقل.

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تقابلاً كيفياً فإن الشروط الآتية تكون متكافئة:

1. التابع f هومومرفيزم.
2. التابع f تابع مستمر و مفتوح.
3. التابع f تابع مستمر و مغلق.
4. أياً كانت $A \subseteq X$ تتحقق المساواة : $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

۞ انتهت المحاضرة 6 ۞