كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

السطحين المتكافئين: نقول عن سطحين أنهما متكافئين إذا وجد تماثل تفاضلي من w إلى w_1 بحيث:

$r(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in w$

$r_1(u_1,v_1) \quad ; \quad (u_1,v_1) \in w_1$

$\varphi : r(u,v) \longrightarrow r_1(u_1,v_1)$

التماثل التفاضلي $\varphi : w \longrightarrow w_1$

$r(u,v) = r_1(u_1(u,v), v_1(u,v))$

وبحيث يتحقق المحدد اليعقوبي (ياكوبيان) غير معدوم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال لنأخذ السطحين:

$S: \vec{r} = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$

حيث $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$

(تمثل جزء من كرة واقعة في الثمن الأول من الفضاء)

$S_1: \vec{r_1} = (u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2})$

تحقق إذا كان السطحين S و S_1 متكافئان:

$u_1 = \cos u \sin v$, $v_1 = \sin u \sin v$ الحل

$\sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2} = \sqrt{1 - \cos^2 u \sin^2 v - \sin^2 u \sin^2 v} = \sqrt{1 - \sin^2 v} = \cos v$

لنأخذ المحدد اليعقوبي :

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = -\sin u \sin v \qquad \frac{\partial u_1}{\partial v} = \cos u \cos v$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial u} = \cos u \sin v \qquad \frac{\partial v_1}{\partial v} = \sin u \cos v$$

$$\begin{vmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -\sin v \cos v \neq 0$$

عندما $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$

فالسطحين S و S_1 متكافئان

تقابل تفاضلي $\varphi : W \longrightarrow W_1$

$r(u,v) \longrightarrow r_1(u_1, v_1)$

التمثيل الرياضي للسطح

السطح في جوار نقطة ما يملك عدد غير منته من التمثيلات الوسيطية ذات الشكل العام $r(u,v)$

أو

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

أو يمكن أن يمثل وسيطياً في بعض الأحيان $(x, y, z(x,y))$

شكل ديكارتي صريح

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أو بالشكل الضمني $\varphi(x,y,z)=0$ شكل ديكارتي غير صريح

يوجد في بعض السطوح نقاط تحقق معادلة السطح ولكنها لا تنتمي إلى السطح

مثال $(x^2+y^2+z^2)(1-x^2-y^2-z^2)=0$ *

$x^2+y^2+z^2=0$ وهي تمثل نقطة $(0,0,0)$

$1-x^2-y^2-z^2=0$ تمثل كرة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1

النقطة $(0,0,0)$ لا تنتمي إلى سطح الكرة ولكنها تحقق المعادلة * بالتالي تسمى نقطة منعزلة

برهنة بفرض S سطح نظامي

$S: r(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

ولنفرض أن المحدد اليعقوبي في النقطة (u_0,v_0) غير معدوم

$$J=\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\neq 0$$

عندئذ يوجد للسطح تمثيل وسيطي بالشكل:

تسمى هذا التمثيل بـ رقعة مونج

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

مثال ليكن السطح S معطى بالشكل:

$S: r(u,v)=(\cos u\sin v,\ \sin u\sin v,\ \cos 2u\sin^2 v)$

ولتكن (u_0,v_0) نقطة من $0<u_0,v_0<\frac{\pi}{2}$

حيث إما $J=0$ عندما أو $J\neq 0$ عندما

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u_0 \sin v_0 & \cos u_0 \sin v_0 \\ \cos u_0 \cos v_0 & \sin u_0 \cos v_0 \end{vmatrix}$$

$$= -\sin^2 u_0 (\sin v_0 \cos v_0) - \cos^2 u_0 (\sin v_0 \cos v_0)$$

$$= -\sin v_0 \cos v_0 \neq 0 \qquad 0 < u_0, v_0 < \frac{\pi}{2}$$

بالتالي يكون المثل وسطياً بالشكل:

$$x = \cos u \sin v$$

$$y = \sin u \sin v$$

$$z = \cos 2u \sin^2 v = (\cos^2 u - \sin^2 u) \sin^2 v$$

$$= \cos^2 u \sin^2 v - \sin^2 u \sin^2 v = x^2 - y^2$$

المثل دياريت في جوار (u_0, v_0)

$$r(x, y, x^2 - y^2)$$

المنحنيات على سطح

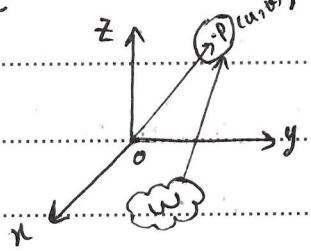
المستوي المماس و المستقيم الناظم

ليكن S سطح نظامي

$$r: W \longrightarrow R^3$$

$$r(u, v) \longrightarrow r(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

عندئذ سمي u و v الاحداثيات المنحنية للنقطة p على هذا السطح.



نعين على السطح المنحنيات التي

$u = Const$ تحقق

وتسمى المنحنيات ذات الوسيط v

$r(Const, v) = r(v)$ بمعنى ولسن سطح

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والمنحنيات ذات الوسيط u التي تحقق $v = Const$ في $r(u,v)$

مجموعة المنحنيات الامدائية تشكل شبكة إمدائية على السطح.

تعريف: نسمي متجه المماس للسطح النظامي $r = r(u,v)$ في النقطة $p(u,v)$ أي متجه مماس لمنحني مار بالنقطة p وواقع على السطح.

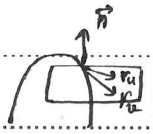
فنجد مجموعة المتجهات المماسة للسطح في النقطة p تشكل مخنى ثنائي البعد $r(u,v) = r(u(t), v(t))$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = r_u\frac{\partial u}{\partial t} + r_v\frac{\partial v}{\partial t}$$

أي أن: $\frac{\partial r}{\partial t} = \alpha r_u + \beta r_v$

تركيب خطي للمتجهين r_u و r_v غير مرتبطان خطياً (لأنه سطح نظامي)

والعكس صحيح أي إذا وجد تركيب خطي لـ r_u و r_v يكون متجه مماس ثنائي البعد وهذا الفضاء المكون من المتجهات ثنائية البعد هو المستوي المماس للسطح في هذه النقطة.



معادلة المستوي المماس

لنأخذ نقطة كيفية من المستوي ولتكن $M(x,y,z)$

متجه الموضع: $\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

متجهات التوجيه هي $\vec{r_u}$ و $\vec{r_v}$ والناظم $\vec{n} = \vec{r_u} \wedge \vec{r_v}$

$(r - r_0)\cdot\vec{n} = 0 \longrightarrow (r - r_0)(\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهو مستوي مختلط $(r - r_0, r_u, r_v) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$x_0 = x(u_0, v_0)$ ، $y_0 = y(u_0, v_0)$ ، $z_0 = z(u_0, v_0)$

- في حال $z = z(x, y)$ أي

$x = u$

$y = v$

$z = z(u, v)$

تكون معادلة المستوي المماس :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = 0$$

- في حال السطح معطى ضمناً : $\varphi(x, y, z) = 0$

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

$\varphi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$

$$\begin{cases} \varphi_x \cdot x_u + \varphi_y \cdot y_u + \varphi_z \cdot z_u = 0 & \text{مشتقها بالنسبة لـ } u \\ \varphi_x \cdot x_v + \varphi_y \cdot y_v + \varphi_z \cdot z_v = 0 & \text{مشتقها بالنسبة لـ } v \end{cases}$$

يوجد عدد لانهائي من الحلول للجملة السابقة

نجد الحل بطريقة كرامر نجد :

$$\frac{\varphi_x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \quad \cdots\cdots (**)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فنجد بالعودة إلى معادلة السطح، ونشر المحدد:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + (y-y_0)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0$$

بالاستفادة من التناسب ** نجد:

$$(x-x_0)\varphi_x + (y-y_0)\varphi_y + (z-z_0)\varphi_z = 0$$

مثال: أوجد معادلة المستوي المماس للسطح:

$$\varphi(x,y,z) = x^3y + 3x^2z - 5y^3z = 0$$

في النقطة $(1,1,1)$:

الحل:

$$(x-1)\varphi_x + (y-1)\varphi_y + (z-1)\varphi_z = 0$$

$$\varphi_x = 3x^2y + 6xz\Big|_{(1,1,1)} = 9$$

$$\varphi_y = x^3 - 15y^2z\Big|_{(1,1,1)} = -14$$

$$\varphi_z = 3x^2 - 5y^3\Big|_{(1,1,1)} = -2$$

$$9(x-1) - 14(y-1) - 2(z-1) = 0$$

$$9x - 14y - 2z + 7 = 0$$

وهي معادلة المستوي المماس للسطح من النقطة $(1,1,1)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: نقول عن مستقيم أنه مستقيم ناظم للسطح في نقطة $p(u,v)$ إذا كان ناظماً (عمودياً) على السطح من هذه النقطة p (أي عمودياً على المستوي الماس في النقطة p).

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

(a,b,c) متجه توجيه المستقيم وهو ناظم المستوي الماس

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

مثال أوجد معادلة المستوي الماس ومعادلات المستقيم الناظم للسطح $x=u,\ y=v,\ z=u^2-v^2$ في النقطة $(1,1)$.

الحل

$$(u,v)=(1,1)\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,0)$$

معادلة المستوي الماس:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix}_{(1,1)}=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)(-2)-(y-1)(-2)+z(1)=0$$

$$-2x+2y+z=0$$

معادلات المستقيم الناظم:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{z-1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: $\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \wedge \vec{r_v}|}$ يعني وحدة المستقيم الناظم الأساسي

ملاحظة: في كل نقطة من نقاط السطح توجد قاعدة $(\vec{r_u}, \vec{r_v}, \vec{n})$ وهذه الأسس غير مرتبطة خطياً

$\vec{n} \perp (\vec{r_u}, \vec{r_v})$ (غير واقعة في مستوي واحد)

تسمى هذه الثلاثية القاعدة المتحركة على السطح

وظيفة: أوجد القاعدة المتحركة على السطح

$r(u,v) = (u, v, u.v)$

في نقطة ما منه $p(u,v)$ ، ومعادلة المستوي الماس و المستقيم الناظم.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة