كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بحوق عمليات

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

صياغة نماذج البرمجة الخطية

سنقدم كل هذا الفصل بعض المسائل الخاصة لنبين كيفية تكوين أو صياغة نموذج رياضي لكل مسألة ومن ثم تعميم صيغة نموذج رياضي

صياغة نماذج البرمجة الخطية:

أولاً: مسألة الغذاء

المشكلة هي تحديد الحد الأدنى لتكلفة متطلبات التغذية وسمي الخليط، أي حل المسألة هو إيجاد الخليط الأمثل الذي يوفر جميع متطلبات التغذية و بأقل تكلفة ممكنة.

مثال: لدى وزارة التربية فكرة لتقديم وجبة غذائية لطلبة المرحلة الابتدائية ولنفرض أنه اتفق أن تتضمن هذه الوجبة حليب ولحم و بيض ولنفرض أنه بناءً على البحوث الصحية تبين أن الطالب في هذا السن يحتاج على الأقل 40 mg من فيتامين A و 50 mg من فيتامين B يومياً، ولدينا:

1 Kg من الحليب يعطي 1 mg من فيتامين A و 10 mg من فيتامين B

1 Kg من اللحم يعطي 5 mg من فيتامين A و 8 mg من فيتامين B

1 دزينة من البيض يعطي 10 mg من فيتامين A و

10 mg من فيتامين B

ولنفترض أن تكلفة 1 kg حليب هي 10 ليرات سورية

تكلفة 1 kg لحم هي 65 ليرة سورية

تكلفة دزينة البيض هي 25 ليرة سورية

يمكن تنظيم جدول المعلومات للمسألة السابقة بالجدول التالي:

نوع الفيتامين / نوع الطعام	حليب	لحم	بيض	الحد الأدنى للمتطلبات اليومية
A	1	5	10	40
B	10	8	10	50
تكلفة الوحدة	10	65	25	

المشكلة هنا هي تحديد الحد الأدنى من عدد كيلوغرامات الحليب واللحم وعدد دزينات البيض التي يجب خلطها معاً لتكوين الوجبة والتي تحقق الحد الأدنى من المتطلبات اليومية للفرد من فيتامين A و B وتحقق أقل كلفة ممكنة بنفس الوقت.

نفرض x_1 عدد كيلوغرامات الحليب

x_2 عدد كيلوغرامات اللحم

x_3 عدد دزينات البيض

دالة الهدف: وهنا يمكن القول دالة التكلفة:

$$f(x) = 10x_1 + 65x_2 + 25x_3 \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

القيود الهيكلية:

$$\begin{cases} 1x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 40 \\ 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geq 50 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

يصبح النموذج الرياضي على الصورة التالية:

وهي قيمة x_1 و x_2 و x_3 و التي تجعل دالة الكلفة التالية:

$$f(x) = 10x_1 + 65x_2 + 25x_3 \quad ---(1)$$

أقل ما يمكن بشرط تحقق:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 40 \\ 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geq 50 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad ---(3)$$

(1) $f(x)$ تدعى دالة الهدف و المتباينات

(2) تدعى القيود الهيكلية

(3) تدعى القيود غير السالبة أما x_j تدعى متغيرات القرار

لتعميم هذه المسألة:

نفترض n عدد أنواع الطعام و m عدد الفيتامينات

j نوع الطعام و i نوع الفيتامين

a_{ij} عدد وحدات فيتامين i في وحدة طعام j

b_i عدد الوحدات المطلوبة من الفيتامين i

c_j تكلفة الوحدة من الطعام j

x_j عدد الوحدات من الطعام j وهي متغيرات القرار

دالة الهدف:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

الشروط الهيكلية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

شرط عدم السلبية : $x_j \geq 0$ و $j = 1, \ldots, n$

النموذج الرياضي : أي المشكلة تصبح تحديد قيم $x_1, \ldots, x_n$ التي تجعل دالة التكلفة أقل ما يمكن : $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

بشرط يحقق : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$; $i = 1, \ldots, m$

و $x_j \geq 0$; $j = 1, \ldots, n$

ثانياً : مشكلة الانتاج

في هذه المسألة نفترض أن مؤسسة صناعية تنتج منتوجات متنوعة وكل منها يمر بعدة مراحل بأعلى ما يمكن من إمكانيات ، و المشكلة هي تحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كل منتوج لتحقيق أكبر فائدة ممكنة .

مثال تنتج إحدى شركات الأثاث أربع موديلات من المقاعد A و B و C و D ، كل مقعد يصنع أولاً في قسم النجارة ثم في قسم الدهان و أخيراً يمر في قسم الانجاز حيث يتم وضع اللمسات الأخيرة ، افترض أنه لا يوجد في قسم النجارة أكثر من 6000 ساعة عمل و أنه لا يوجد في قسم الدهان أكثر من 4000 ساعة عمل للشخص الواحد و أنه لا يوجد في قسم الانجاز أكثر من 5000 ساعة عمل للشخص الواحد ، فإذا كان عدد الساعات المطلوبة لكل مقعد في الأقسام الثلاثة على الترتيب :

المقعد الواحد من النموذج A يحتاج إلى 2 و 1 و 2 ساعة عمل

المقعد الواحد من النموذج B يحتاج إلى 2 و 2 و 3 ساعة عمل

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

المقعد الواحد من النموذج C يحتاج إلى 3 و 2 و 4 ساعة عمل

المقعد الواحد من النموذج D يحتاج إلى 3 و 3 و 4 ساعة عمل

و الأرباح المتوقعة لكل مقعد هي على الترتيب :

A : 1.2 ل.س C : 1.8 ل.س

B : 2 ل.س D : 4 ل.س

يمكننا جمع المعلومات السابقة في الجدول التالي :

النماذج / الأقسام	A	B	C	D	القدرة المتاحة
النجارة	2	2	3	3	6000
الدهان	1	2	2	3	4000
الانجاز	2	3	4	4	5000
الأرباح	1.2	2	1.8	4	

ولنفرض أن المواد الأولية و العمومية موجودة و أن كل المقاعد المنتجة يمكن بيعها و أن الشركة تريد تحديد الكميات التي يجب إنتاجها لكل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن

نفرض x_1 عدد المقاعد من النموذج A

x_2 عدد المقاعد من النموذج B

x_3 عدد المقاعد من النموذج C

x_4 عدد المقاعد من النموذج D

دالة الهدف : $f(x) = 1.2x_1 + 2x_2 + 1.8x_3 + 4x_4$

الشروط الهيكلية :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 6000 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 5000 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

شرط عدم السلبية: $x_j \geq 0$ و $j = \overline{1 \text{ و } 4}$

النموذج الرياضي: إيجاد قيم x_1, x_2, x_3, x_4 التي تجعل $f(x)$ أكبر ما يمكن وتحقق الشروط الهيكلية وشرط عدم السلبية.

لتعميم هذه المسألة:

نفرض n عدد النماذج و m عدد الأقسام

j النموذج و i القسم

a_{ij} عدد الساعات المطلوبة في القسم i لانتاج واحدة من النموذج j

b_i عدد ساعات العمل المتاحة في القسم i

c_j ربح الوحدة الواحدة في النموذج j

x_j الكمية التي يجب إنتاجها من المنتج j وهي متغيرات القرار

يصبح النموذج بتحديد قيم x_1 و..... x_n التي تجعل

دالة الهدف $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ أكبر ما يمكن

بشرط تحقق الشروط الهيكلية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{و } i = 1, \dots, m$$

وشرط عدم السلبية: $x_j \geq 0$ و $j = 1, \dots, n$ و.....

ثالثاً: مشكلة النقل

ندرس الآن مشكلة نقل منتج معين من مراكز مختلفة إلى مراكز الاستهلاك أو المخازن بأقل تكلفة ممكنة.

مثال: مصنع له ثلاث مراكز إنتاج O_1 و O_2 و O_3 وتقع في ثلاث أماكن مختلفة وجميعها تنتج نفس السلعة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

منتوج المصنع يوزع على أربع زبائن D_1 و D_2 و D_3 و D_4
و أي مركز من مراكز الانتاج يمكنه تسويق إنتاجه إلى أكثر من مستهلك و لنفرض أن كميات العرض في المصانع الثلاثة هي :
في O_1 : 30 و في O_2 : 50 و في O_3 : 40
و كميات الطلب في مراكز الاستهلاك هي على التوالي :
في D_1 : 20 و في D_2 : 30 و في D_3 : 40 و في D_4 : 30
و أيضاً تكلفة الشحن للوحدة الانتاجية من مراكز الانتاج إلى المستهلكين على التوالي : D_1 و D_2 و D_3 و D_4
من المصنع O_1 إلى المستهلكين : 12 و 4 و 9 و 5
من المصنع O_2 إلى المستهلكين : 8 و 1 و 6 و 6
من المصنع O_3 إلى المستهلكين : 1 و 12 و 4 و 7

الاستهلاك / مراكز الانتاج	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
O_1	12	4	9	5	30
O_2	8	1	6	6	50
O_3	1	12	4	7	40
الطلب	20	30	40	30	

المشكلة هنا هي اختيار نمط نقل خاص أي تحديد الكميات $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})$ التي يجب شحنها من O_1 إلى المستهلكين D_1 و D_2 و D_3 و D_4 و تحديد الكميات $(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24})$ التي يجب شحنها من المصنع O_2 إلى المستهلكين D_1 و D_2 و D_3 و D_4
و تحديد الكميات $(x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})$ التي يجب شحنها من المصنع O_3 إلى المستهلكين D_4 و ---- و D_1 بأقل تكلفة ممكنة .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دالة الهدف :

$$f(x) = 12x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 1x_{22} + 6x_{23} + \dots\dots\dots + 12x_{32} + 4x_{33} + 7x_{34}$$

النموذج : تحديد قيم المتغيرات x_{ij} حيث $i = \overline{1,3}$ و $j = \overline{1,4}$

بحيث تكون الدالة $f(x)$ أقل ما يمكن بشرط تحقيق الشروط :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40 \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \qquad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

و $x_{ij} \geq 0$; $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$

لتعميم هذه المسألة :

n عدد المستهلكين و m عدد المصانع

j هو المستهلك $j = \overline{1,n}$ و i هو رقم المصنع $i = \overline{1,m}$

S_i المعروض من المصنع i

d_j المطلوب من المستهلك j

C_{ij} تكلفة الشحن من المصنع i إلى المستهلك j

x_{ij} الكمية المشحونة من السلعة من المصنع i إلى المستهلك j

النموذج : تصبح المشكلة هي تحديد قيم x_{ij} التي تجعل

دالة الهدف أقل ما يمكن $f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\,x_{ij}$

بشرط $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

و $x_{ij} \geq 0$; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group : A to Z مكتبة

وظيفة : يمتلك مزارع مئة فدان ، يريد أن يزرع جزء منها بالقمح وجزء آخر من البطاطا ، و معطيات المسألة كالتالي :
تكاليف الزراعة بالدينار لكل فدان من القمح و البطاطا هي 20 و 10 دينار على الترتيب ، و أيام العمل لكل فدان من القمح و البطاطا هي 4 أيام للقمح و يوم واحد للبطاطا ،
رأس مال المزارع 1100 دينار و بإمكانه تمضية 160 يوم من العمل من الزراعة ، و السؤال الآن هو :
كيف يقسم المزارع الأرض بحيث يكون ربحه الكلي أكبر ما يمكن إذا كان الربح الصافي بالدينار من كل فدان قمح 120 و لكل فدان بطاطا 40 .

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة