كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تكملة الملاحظات من المحاضرة السابقة:

3- أحياناً يُدعى القياس μ قياساً على الفضاء (X,D) أو على X إذا لم يكن هُناك أي التباس.

4- عندما يكون قياس أي مجموعة $\mu(x)=1$ فإننا ندعو μ قياس احتمال وندعو (μ, D, X) فضاء احتمالي.

5- يمكن تعريف أكثر من قياس على الجبر التام D.

6- في التطبيقات العمليّة عندما يُطلب إلينا إثبات أنّ دالة المجموعة $\mu: D \to \overline{R}^+$ قياساً على D حيث D جبر تام عندئذٍ يجب أن نبرهن أولاً أنّ μ دالة غير سالبة أي $A \in D$; $\mu(A) \geq 0$ بالإضافة إلى الخاصتين اللتين يحقّقهما القياس μ وهما: $\mu(\phi)=0$ و خاصّة الجمعيّة التّامة.

• بعض التّعاريف المتّصلة بالقياس:

1) نقول عن القياس $\mu: D \to \overline{R}^+$ أنّهُ قياس منتهٍ و (X,D,μ) فضاء قياس منتهٍ إذا كان: $\forall A \in D$; $\mu(A) < +\infty$ وذلك من أجل كل مجموعة قيوسة A من D وفي هذه الحالة يكون لدينا $\mu(X) < +\infty$

مثال: الفضاء الاحتمالي (μ, D, X) هو فضاء قياس منتهٍ لأنّهُ: $\mu(x)=1<+\infty$

2) نقول عن القياس $\mu: D \to \overline{R}^+$ أنّهُ قياس σ-منتهٍ و (X,D,μ) فضاء قياس σ-منتهٍ إذا كان بالإمكان إيجاد متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D المنفصلة مثنى مثنى وبحيث يكون $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\mu(A_i) < \infty$ وذلك من أجل $i=1,2,\dots$

3) نقول عن القياس $\mu: P \to \overline{\mathbb{R}}^+$ أنّهُ قياس غير منتهٍ إذا لم يكن قياساً منتهياً أو σ-منتهٍ.

ملاحظة: أغلب القياسات التي سنتعامل معها هي قياسات منتهية أو σ-منتهية

مثال: عن القياس σ-منتهٍ:

لتكن μ دالة قياس وهي قياس الطول المعرّف على الجبر التّام $B_{\mathbb{R}}$ في $\mathbb{R}$ والذي يعرف (قياس لوبيغ) والمعرّف بالشكل التّالي:

$$\mu(I) = \mu(]a,b[) = b-a \quad ; \quad \forall I =]a,b[\in B_{\mathbb{R}}$$

حيث $]a,b[$ مجال حقيقي محدود في $\mathbb{R}$ والمطلوب:

إثبات أنّ μ قياس σ-منتهٍ.

الحل: إنّ μ قياس σ-منتهٍ لأنّهُ يمكن ايجاد متتالية $(\overbrace{]-n,n[}^{A_n})_{n\geq 1}$ من عناصر $B_{\mathbb{R}}$ غير المتقاطعة والتي تحقّق:

$$\mathbb{R} =]-1,1[\cup]-2,+2[\cup \dots \cup]-n,+n[\cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n,+n[$$

و $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \mu(]-n,+n[) = n-(-n) = 2n < \infty$

مثال: ليكن الفضاء القابل للقياس $(X, 2^X)$ ولتكن μ تابع مجموعة $\mu: 2^X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ معرّف بالشكل التّالي:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{عدد عناصر } A & ; \ A \text{ منتهية} \\ +\infty & ; \ A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

والمطلوب: تحقّق من أنّ $(X, 2^X, \mu)$ فضاء قياس ((تحقّق من أنّ μ قياس)) حيث $p(x) = 2^x$ مجموعة جميع أجزاء المجموعة غير الخالية X.

الحل: حتّى نبرهن أنّ $(X, 2^X, \mu)$ فضاء قياس يجب أن نبرهن أنّ μ قياس على X.

أولاً: نلاحظ من تعريف μ أنّ $\mu(A) \geq 0$ وذلك $\forall A \in 2^X$ أي أنّ μ دالة موجبة غير سالبة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ثانياً: نبرهن أنّ $\mu(\phi)=0$

عندما $A=\phi$ و $\phi \in 2^X$ فإنّ A مجموعة منتهية وعدد عناصرها يساوي الصفر

أي: $\mu(A)=\mu(\phi)=$ عدد العناصر $\phi=0 \Rightarrow \mu(\phi)=0$

ثالثاً: خاصة الجمعية التامة:

لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر 2^X غير المتقاطعة ولنبرهن أنّ $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

لدينا هنا حالتان: الحالة ①: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية عندئذٍ فإنّ كلاً من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ هو مجموعة منتهية ويكون لدينا:

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=$ عدد عناصر $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ = عدد عناصر A_1 + عدد عناصر A_2 + ...

$=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

الحالة ②: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية ويكون لدينا $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\infty$ وفي هذه الحالة نناقش احتمالان:

- الاحتمال الأول: توجد مجموعة واحدة على الأقل من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ غير منتهية ولتكن A_i عندئذٍ فإنّ $\mu(A_i)=\infty$ ويكون لدينا:

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots+\mu(A_i)+\ldots=\infty=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

وبالتالي: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

- الاحتمال الثاني: إنّ كلاً من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ هي مجموعات منتهية ولكن عددها غير منتهٍ أي عدد هذه المجموعات غير منتهٍ وبالتالي الاجتماع $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي يوجد عدد من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ أكبر أو تساوي الواحد أي أنّ:

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\geq\sum_{i=1}^{\infty}1$

$\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}1=\infty=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

وبالتالي: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وفي كلا الحالتين فإنّ خاصية الجمعيّة التّامة محققة إذاً من أولاً وثانياً وثالثاً نجد أنّ μ قياس على X و $(X, 2^X, \mu)$ فضاء قياس.

الخواص البسيطة للقياس:

1) خاصة الجمعيّة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ و كانت $(A_i)_{i=1}^{n} = \{A_1, \dots, A_n\}$ متتالية منتهية من عناصر D أو من المجموعات المقوسة من D وغير المتقاطعة عندئذٍ فإنّ $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

البرهان: بما أنّ $A_i \in D$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$ من التعريف و D جبر تام في X بالتّالي $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in D$. الآن لنبني المتتالية $(B_i)_{i \geq 1}$ بالشكل التّالي:

$$\begin{cases} B_i = A_i & ; \ i = 1, 2, \dots, n \\ B_i = \phi & ; \ i > n \ (i = n+1, n+2, \dots) \end{cases}$$

نلاحظ أنّه حسب تعريف $(B_i)_{i \geq 1}$ فإنّها متتالية من عناصر D وغير متقاطعة ويكون لدينا

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

($\mu(\phi) = 0$ لأنّ μ قياس)

وكعكس خاصة الجمعيّة التامة

2) خاصة تحت الجمعيّة التّامة: إذا كانت (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من المجموعات المقوسة من D بالنّسبة لـ μ عندئذٍ فإنّ

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

البرهان: بما أنّ $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من المجموعات المقوسة بالنسبة لـ μ من D أي $A_i \in D$ من أجل $i = 1, 2, \dots$ عندئذٍ وبما أنّ D جبر تام في X وبالتّالي بما أنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$ الآن لنبني المتتالية $(B_i)_{i \geq 1}$ من عناصر D بالشكل التّالي:

$$B_1 = A_1, \ B_2 = A_2 - A_1, \ B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \ B_i = A_i - (\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j)$$

وكما نلاحظ فإنّ $(B_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر D المقوسة لأنّ $(B_i \subseteq A_i)$ من أجل $i = 1, 2, \dots$ وهي غير متقاطعة وكذلك فإنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتّالي فإنّ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

لأنّ μ متزايد.

3. خاصة التزايد: إذا كانت (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت A و B مجموعتين متمّمتين في D بالنسبة لـ μ بحيث أنّ $A \subseteq B$ عندئذٍ فإنّ $\mu(A) \leq \mu(B)$

البرهان: لدينا $B = A \cup (B - A)$ لأنّ $A \subseteq B$ حيث:

بما أنّ D جبر تام في X وبالتّالي $B - A \in D$ و A من D إذاً $A \cup (B - A)$ من D و $A \cap B - A = \phi$ وبالتّالي حسب خاصة الجمعية للقياس μ فإنّ

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$$

$$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$$

وبالتّالي μ دالة غير سالبة ومتزايدة.

4. خاصة التفريق: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت A و B مجموعتين متمّمتين من D بالنسبة لـ μ بحيث أنّ $A \subseteq B$ عندئذٍ فإنّ

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

البرهان: لدينا $B = A \cup (B - A)$ لأنّ $A \subseteq B$ حيث:

بما أنّ D جبر تام في X وبالتّالي $B - A \in D$ و A من D إذاً $A \cup (B - A)$ من D و $A \cap B - A = \phi$ وبالتالي حسب خاصة الجمعية للقياس μ فإنّ

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

$$\Rightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة