كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• بعض النتائج والملاحظات:

1- كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة بوريلية وعناصر الجالات المفتوحة من الشكل $]a,b[$ في $\mathbb{R}$ هي مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$ وبالتالي هي مجموعات بوريلية في $\mathbb{R}$.

2- كل مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة بوريلية وعناصر الجالات المغلقة من الشكل $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ هي مجموعات مغلقة في $\mathbb{R}$ إذاً هي مجموعات بوريلية في $\mathbb{R}$ أو بشكل آخر يمكن القول بأنّ $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$ بالتالي هي مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$.

تقاطع عدد لجالات مفتوحة أي لمجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$

3- إنّ المجموعتان ϕ و $\mathbb{R}$ مجموعتان بوريليتان في $\mathbb{R}$ أي $\phi \in B_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{R} \in B_{\mathbb{R}}$ لأنّ $B_{\mathbb{R}}$ جبر تام في $\mathbb{R}$.

4- جميع الجالات من أحد الأشكال التالية $[a,b[$ و $]a,b]$ من أجل أي عددين حقيقيين a و b حيث $a \leq b$ هي مجموعات بوريلية في $\mathbb{R}$ لأنّ:

$[a,b[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b[$

تقاطع عدد لجالات مفتوحة أي لجالات مفتوحة في $\mathbb{R}$ وبالتالي $[a,b[$ مجموعة بوريلية. وكذلك فإنّ $]a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a,b+\frac{1}{n}[$ تقاطع عدد لجالات مفتوحة في $\mathbb{R}$ أي لمجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$ وبالتالي $]a,b]$ مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$.

5- كل مجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ في $\mathbb{R}$ حيث a عدد حقيقي هي مجموعة بوريلية

في $\mathbb{R}$ لدينا: $\{a\} = [a,a] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[$; $n \in \mathbb{N}$

تقاطع عدد لا منتهي من المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ أي المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ إذاً هو مجموعة بوريلية.

6- كل مجموعة عددية هي مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$ لأنها اجتماع عدد لا منتهي من المجموعات وحيدة العنصر وعددية وبوريلية أي:

$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\} \in B_{\mathbb{R}}$; $\{a_i\} \in B_{\mathbb{R}}$; $i = 1, 2, \dots$

وبالتالي نجد كلاً من المجموعات التالية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مجموعة عددية في $\mathbb{R}$ إذاً هي مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$.
- // // الصحيحة $\mathbb{Z}$ // // // // // // // // // // // //
- // // الصحيحة السالبة $\mathbb{Z}^-$ // // // // // // // // // // //
- // // الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ // // // // // // // // // // //
- // // العادية $\mathbb{Q}$ مجموعة عددية // // // // // // // // // //

إذاً $\mathbb{N} \in B_{\mathbb{R}}$ حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية تنتمي لجبر بوريل في $\mathbb{R}$ بالتالي $\mathbb{N}$ مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$ كذلك بالنسبة لـ $\mathbb{Z} \in B_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{Z}^- \in B_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{Z}^+ \in B_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{Q} \in B_{\mathbb{R}}$

7- كل مجال في $\mathbb{R}$ هو مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$ حتى لو كان غير محدد أي من أحد الأشكال التالية $]-\infty, b]$ $[a, +\infty[$ $]-\infty, +\infty[$

- توليد جبر بوريل في $\mathbb{R}$:

مبرهنة: إن أي صف من الصفوف التالية يولد جبر بوريل في $\mathbb{R}$:

1- صف المجالات المفتوحة والمحدودة:

$J_1 = \{]a,b[\; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a<b \} \subseteq p(\mathbb{R})$

2- صف المجالات المغلقة والمحدودة:

$J_2 = \{ [a,b] \; ; \; a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq b \} \subseteq p(\mathbb{R})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3. صفّ المجالات المغلقة من اليمين والمفتوحة من اليسار والمحدودة:

$$J_3 = \{\ ]a,b]\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\ ;\ a<b\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

4. صفّ المجالات المفتوحة من اليمين والمغلقة من اليسار والمحدودة:

$$J_4 = \{\ [a,b[\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\ ;\ a<b\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

5. صفّ المجالات المفتوحة غير المحدودة من اليمين:

$$J_5 = \{\ ]a,+\infty[\ ;\ a \in \mathbb{R}\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

6. صفّ المجالات المفتوحة غير المحدودة من اليسار:

$$J_6 = \{\ ]-\infty,b[\ ;\ b \in \mathbb{R}\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

7. صفّ المجالات نصف المفتوحة من اليمين وغير المنتهية:

$$J_7 = \{\ [a,+\infty[\ ;\ a \in \mathbb{R}\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

8. صفّ المجالات نصف المفتوحة من اليسار وغير المنتهية

$$J_8 = \{\ ]-\infty,b]\ ;\ b \in \mathbb{R}\ \} \subseteq p(\mathbb{R})$$

الفصل الثّالث: فضاء القياس:

بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسيّة:

1. نقول عن المتتالية $(A_i)_{i\geq 1} = \{A_1, A_2, \dots\}$ من عناصر D حيث D صفّ من أجزاء مجموعة ما غير خالية X أنّها منفصلة مثنى مثنى (غير متقاطعة) إذا كان

$$A_i \cap A_j = \phi \quad ; \quad i \neq j \quad ; \quad (i=1,2,\dots \ \& \ j=1,2,\dots)$$

2. دالة مجموعة: وهي الدالة المعرّفة على بعض صفوف المجموعات مثل الحلقة والجبر والجبر التّام.

3. مجموعة الأعداد الحقيقية هي: $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

4. مجموعة الأعداد الحقيقية الموسّعة هي: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$

5. مجموعة الأعداد الحقيقية الموسّعة هي $\overline{\mathbb{R}}^+$ أي:

$$\overline{\mathbb{R}}^+ = [0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

6- يمكن توسيع العمليات الجبرية في $\overline{\mathbb{R}}$ بالشكل التّالي:

① نصطلح على أنّ $a(+\infty) = a(-\infty) = 0$

② $a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & ; a > 0 \\ -\infty & ; a < 0 \end{cases}$; $a \in \mathbb{R}$.

■ القياس على الصّف G: ليكن G صف من أجزاء مجموعة ما غير خالية X [حلقة جبر] بحيث أنّ $\phi \in G$ عندئذٍ نسمّي دالة المجموعة τ المعرّفة على الصّف G حيث: $\tau : G \to \mathbb{R}^+$ بقياس على الصّف G إذا حققت الشّروط التّالية:

1. $\tau(\phi) = 0$

2. من أجل أيّة متتالية $(A_i)_{i \geq 1} = \{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\}$ من عناصر الصف G والمنفصلة مثنى مثنى بمعنى (غير المتقاطعة) إذا كان: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in G$ عندئذٍ $\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$

3. $\forall A \in G$; $\tau(A) \geq 0$

■ القياس الموجب وخواصه [هامّ في الحياة العملية]:

إنّ الطول والمساحة والحجم والكتلة والشحنة الكهربائية إضافة لمفاهيم أخرى نصادفها في مجالات علمية مختلفة كالرّياضيات والميكانيك والفيزياء ما هي إلاّ تعميم لمفهوم القياس المجرّد.

فمثلاً على سبيل المثال: في الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}$ نربط بين كل مجال وطوله وفي الفضاء $\mathbb{R}^2$ نربط كل منطقة من $\mathbb{R}^2$ بعدد غير سالب يمثّل مساحتها وهكذا....

فالقياس من وجهة نظر رياضية بحتة هي دالة معرّفة على صفّ من المجموعات الجزئية لمجموعة ما معروفة وغير خالية نقابل وفقها كل عنصر من ذلك الصّف بعدد حقيقي غير سالب.

تعريف القياس: لتكن X مجموعة ما غير خالية و D جبر تام في X [أي (X, D) فضاء قياس] نسمّي كل دالة مجموعة $\mu : D \to \overline{\mathbb{R}}^+$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$A \to \mu(A)$; $\forall A \in D$

تحقّق الخاصتين التاليتين :

1- $\mu(\phi) = 0$

2- من أجل أيّة متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D غير المتقاطعة (المنفصلة مثنى مثنى) فإنّ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

تُدعى [الخاصة الجمعية التّامة للدّالة μ] بقياس موجب على D

أو اختصاراً قياس على D .

■ بعض الملاحظات والمفاهيم على القياس μ :

1- ندعو القيمة $\mu(A)$ من أجل كل مجموعة قيوسة A من الفضاء القيوس (X, D) بقياس A ، أي A من D .

2- ندعو الثلاثية (X, D, μ) فضاء القياس μ أو اختصاراً فضاء قياس

ونقول في هذه الحالة عن أي مجموعة $B \in D$ أنّها مجموعة قيوسة بالنّسبة لـ μ

أو B مجموعة μ قيوسة .

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة