كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة :السادسة/نظري/

6

2 ـ الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت :

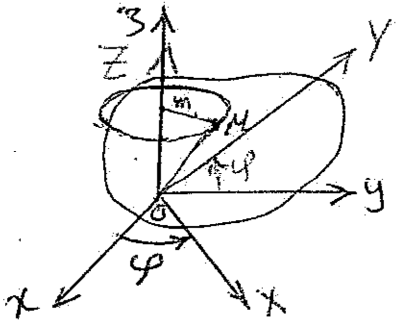
نقول عن جسم صلب بأنه يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت إذا ثبتت فيه نقطتان أثناء الحركة. ندعو المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران.
ـ محور الدوران في هذه الحركة دوماً ثابت.

تعيين موضع الجسم الصلب :

وجدنا سابقاً أن موضع وحركة جسم صلب مثبته بنقطتين يتعين تماماً إذا عرفنا موضع وحركة نقطة واحدة من الجسم غير واقعة على استقامة واحدة مع النقطتين الثابتتين (أي لا تقع على محور الدوران) إذاً يتعين موضع أي نقطة من الجسم بدلالة وسيط واحد فالجسم درجة حرية واحدة.

لنأخذ جملة احداثيات ثابتة في الفضاء ولتكن $Oxyz$ حيث Oz منطبق على المحور الثابت للدوران. ولنربط مع الجسم مجموعة محاور متماسكة ولتكن $OXYZ$ حيث OZ منطبق أيضاً على محور الدوران. فإن حركة الجسم تؤول الى حركة المحاور $OXYZ$ بالنسبة للمحاور $Oxyz$ وبما أن Oz منطبق على OZ فإن حركة الجسم تتعين بمعرفة الزاوية بين المستويين XOZ و xOz ولتكن φ.

الحركة تتعين بمعادلة واحدة هي (معادلة الحركة): $\varphi = \varphi(t)$
وتكون السرعة الزاوية $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ وشعاعها محمول على محور الدوران.



مثال :

حركة الباب، تتعين عن طريق مستوي ثابت وهو الحائط أما المستوي المتحرك فهو الباب ويحوي محور الدوران ذاته الذي يحويه الباب، والوسيط هو الزاوية بين الحائط والباب.

الدراسة الشعاعية للحركة :

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب ولتكن m مسقط M على المحور Oz وهي نقطة من الجسم الصلب وبالتالي: $|\vec{mM}| = C$

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} \qquad (1)$$

عندما يتحرك الجسم فإن M تتحرك بحيث تكون بعدها عن m ثابتاً دوماً وبالتالي فالمسار هو دائرة مركزها m واقعة في مستو مار من m وعمودي على Oz محور الدوران.
وبما أن M نقطة كيفية من الجسم فمسارات جميع نقاط الجسم هي دوائر تقع في مستويات عمودية على محور الدوران ومتمركزة عليه.

تعيين السرعة :

لإيجاد السرعة نشتق (1) بالنسبة للزمن :

$$\vec{v}(M) = \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM} \qquad (2)$$

(مشتق $\vec{om}$ هو الصفر؛ لأنه متجه ثابت بالطول والمنحى فمشتقه صفر)
أي متجهات السرعة عمودية على محور الدوران .

$$|\vec{v}(M)| = |\vec{\dot{\varphi}}| \cdot |\vec{mM}| \cdot \sin(\vec{\dot{\varphi}}, \vec{mM})$$

(متجه الدوران) $\vec{\dot{\varphi}} = \vec{\omega}$ و $|\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{mM}| \cdot 1 = \omega \cdot c$ السرعة العددية .

حيث $|\vec{mM}| = c$ وهو نصف قطر مسار M .

تعيين التسارعات :

لإيجاد تسارع النقطة M نشتق (2) بالنسبة للزمن :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{mM} + \vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM}) \quad (*)$$

باستخدام علاقة جيبس :

$$\{ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \}$$

$$\vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM}) = \underbrace{(\vec{\dot{\varphi}} \cdot \vec{mM})}_{=0} \vec{\dot{\varphi}} - \dot{\varphi}^2 \vec{mM}$$

نعوض في علاقة التسارع :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{mM} - \dot{\varphi}^2 \vec{mM} \qquad (3)$$

وهو حاصل جمع متجهين :

المتجه الأول عمودي على نصف قطر الدائرة $\vec{mM}$ ويسمى بالتسارع المماسي :

$$\vec{\Gamma}_T = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{mM}$$

والمتجه الثاني محمول على نصف قطر الدائرة ويتجه إلى محور الدوران (متجه إلى الداخل) ويسمى بالتسارع الناظمي :

$$\vec{\Gamma}_n = -\dot{\varphi}^2 \vec{mM}$$

ملاحظة :

- في حالة الدوران المنتظم فإن طويلة متجه الدوران ثابتة أي $\dot{\varphi} = c \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_T = 0 \Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = -\dot{\varphi}^2 \vec{mM} = \vec{\Gamma}_n$$

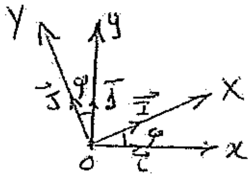
فالتسارع هو تسارع ناظمي فقط .

- الدراسة التحليلية للحركة :

لنأخذ $oxyz$ جملة محاور احداثية ثابتة و oz منطبق على محور الدوران .
ولنأخذ $OXYZ$ جملة محاور متماسكة مع الجسم الصلب بحيث OZ ينطبق على محور الدوران
أي على oz .
لتكن M نقطة من الجسم احداثياتها بالنسبة للمحاور المتحركة هي $M(X,Y,Z)$ وهي مقادير
ثابتة . واحداثياتها بالنسبة للجملة الثابتة هي $M(x,y,z)$

$$\vec{OM} = X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$$

نسقط العلاقة السابقة على المحاور الثابتة :
لذلك نسقط $\vec{I}$ ، $\vec{J}$ ، $\vec{K}$ على المحاور الثابتة :



$$\vec{I} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{J} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{K} = \vec{k}$$

$$\vec{OM} = X(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + Y(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) + Z\vec{k}$$
$$\vec{OM} = (X\cos\varphi - Y\sin\varphi)\vec{i} + (X\sin\varphi + Y\cos\varphi)\vec{j} + Z\vec{k}$$

تكون مركبات M في الجملة الثابتة :

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi \\ z &= Z \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

إذاً يتعين الموضع بوسيط واحد هو φ .

وبمعرفة معادلة الحركة الوحيدة للجسم : $\varphi = \varphi(t)$

نعوض $\varphi(t)$ بدلالة الزمن في العلاقات (4) فنحصل على معادلات حركة النقطة M :

$$x = x(t) \;,\; y = y(t) \;,\; z = z(t)$$

وبحذف الوسيط t من المعادلات الثلاثة نحصل على معادلتي مسار النقطة M .

تعيين السرعة :

نشتق العلاقات (4) بالنسبة للزمن :

$$\dot{x} = -\dot{\varphi}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = -\dot{\varphi}y$$
$$\dot{y} = \dot{\varphi}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) = \dot{\varphi}x$$
$$\dot{z} = 0$$

أي أن مركبات السرعة محمودية على محور الدوران .

تعيين التسارعات :

لإيجاد التسارعات نشتق مرة ثانية :

$$\ddot{x} = -\ddot{\varphi}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) - \dot{\varphi}^2(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) = -\ddot{\varphi}y - \dot{\varphi}^2x$$
$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) - \dot{\varphi}^2(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = \ddot{\varphi}x - \dot{\varphi}^2y$$
$$\ddot{z} = 0$$

أي أن مركبات التسارعات عمودية على محور الدوران أيضاً .

- هكذا أوجدنا السرعة والتسارعات في الجملة الثابتة عن طريق الاشتقاقات مباشرة وكان بالإمكان الحصول على نفس النتيجة بطريقة إسقاط العلاقات (2)

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega}\wedge\vec{mM} = \vec{\omega}\wedge(\vec{mO}+\vec{OM}) = \underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{mO}}_{=0} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}=\omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= -\dot{\varphi}y\,\vec{i} + \dot{\varphi}x\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

وباستخدام العلاقة (*)

$$\vec{\Gamma}(M) = \ddot{\vec{\varphi}}\wedge(\vec{mO}+\vec{OM}) + \dot{\vec{\varphi}}\wedge\vec{v}(M)$$
$$= \underbrace{\ddot{\vec{\varphi}}\wedge\vec{mO}}_{=0} + \ddot{\vec{\varphi}}\wedge\vec{OM} + \dot{\vec{\varphi}}\wedge\vec{v}(M)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\varphi}y & \dot{\varphi}x & 0 \end{vmatrix} = (-\ddot{\varphi}y - \dot{\varphi}^2x)\vec{i} + (\ddot{\varphi}x - \dot{\varphi}^2y)\vec{j} + 0\vec{k}$$

أما لإيجاد مساقط السرعة والتسارعات في الجملة المتحركة فيمكن إيجادها عن طريق الاشتقاق نستخدم مصرأ الإسقاط كالجب (عن طريق استخدام القانون)

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\varphi}' \wedge \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \varphi' \\ X & y & z \end{vmatrix} = -\varphi' y \vec{I} + \varphi' X \vec{J} + 0\vec{K}$$

أما مساقط التسارعات في الجملة المتحركة (المتماسكة مع الجسم الصلب):

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varphi}'' \wedge \vec{OM} + \vec{\varphi}' \wedge \vec{V}(M) = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \varphi'' \\ X & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \varphi' \\ -\varphi' y & \varphi' X & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varphi'' y - \varphi'^2 X)\vec{I} + (\varphi'' X - \varphi'^2 y)\vec{J} + 0\vec{K}$$

ملاحظة:

- إذا كانت لـ $\vec{\varphi}' = \vec{\omega}$ متجه الدوران (متجه السرعة الزاوية) و $\vec{\varphi}'' = \vec{\varepsilon}$ متجه التسارع الزاوي نفس الجهة فالحركة الدورانية متسارعة.
- أما إذا كان $\vec{\omega}$ و $\vec{\varepsilon}$ في جهتين مختلفتين كانت الحركة متباطئة.
- إذا كانت طويلة المتجه $\vec{\omega}$ ثابتة تكون الحركة دورانية منتظمة
- إذا كانت طويلة المتجه $\vec{\varepsilon}$ ثابتة تكون الحركة متغيرة بانتظام.

مثال: جسم صلب يدور حول محور أفقي بسرعة زاوية معطاة بالعلاقة:

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0$$ ، حيث ω ثابت

حيث: في اللحظة $t=0$ كانت $\theta = \alpha$ ، $\theta' = 0$

ادرس حركة هذا الجسم (ادرس حركة نقطة على مسارها).

الحل:

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0$$

$$\theta'' = -\omega^2\theta \Rightarrow \frac{d\theta'}{dt} = -\omega^2\theta \Rightarrow \frac{d\theta'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\omega^2\theta$$

$$\Rightarrow \theta' d\theta' = -\omega^2\theta d\theta$$

$$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{\theta'^2}{2} = -\omega^2\frac{\theta^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow \theta'^2 = -\omega^2\theta^2 + C$$

في اللحظة $t=0$ كانت $\theta = \alpha$ ، $\theta' = 0$ $\Leftarrow$ $0 = -\omega^2\alpha^2 + C$ $\Leftarrow$ $C = \omega^2\alpha^2$

$$\xRightarrow{\text{بالتعويض}} \theta'^2 = \omega^2(\alpha^2 - \theta^2) \Rightarrow \boxed{\theta' = \omega\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \omega dt \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \arcsin\frac{\theta}{\alpha} = \omega t + \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \alpha\sin(\omega t + \beta)}$$

لنوجد الثابت β: من الشروط الابتدائية $\theta = \alpha$ ، $t = 0$ $\Leftarrow$ $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta = \alpha \cos \omega t}$$

وهو قانون الحركة فالحركة دائرية غير منتظمة (لأن ω ليست ثابتة) أي أن حركة النقاط على مسارات دوائر.

سرعة النقطة A الاختيارية : $\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{A'A}$

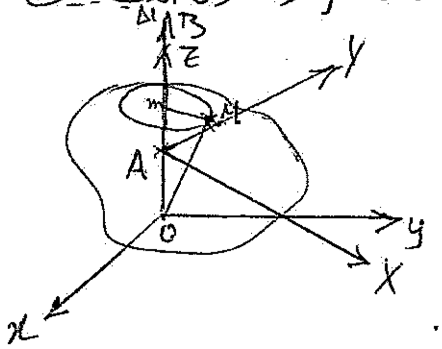
حيث A' مسقط النقطة A على محور الدوران.

تسارع النقطة A : $\vec{\Gamma}(A) = \vec{\omega'} \wedge \vec{A'A} - \omega^2 \vec{A'A}$

3 - الحركة الدورانية حول محور منزلق :

نقول عن جسم صلب بأنه يتحرك حركة دورانية حول محور منزلق إذا انسحب مستقيم (محور) متماسك مع الجسم وليكن Δ على مستقيم ثابت Δ_1

- الجسم يستطيع الدوران حول Δ_1 والانسحاب على هذا المستقيم. ويكون الجسم في هذه الحالة درجتا حرية أي يتعين موضع الجسم بوسيطين : زاوية الدوران φ والطول الذي يعين الانسحاب على Δ_1 (z)



لدراسة الحركة نأخذ جملة محاور ثابتة $Oxyz$ في Oz منطبق على المحور المنزلق.
ونأخذ جملة محاور متماسكة مع الجسم ولتكن $AXYZ$ حيث AZ منطبق على المحور المنزلق ومنطبق على Oz.

الدراسة الشعاعية للحركة الدورانية حول محور منزلق :

لتكن M نقطة ما من الجسم مسقطها على AZ هو m فيكون :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{Am} + \vec{mM} \qquad (1)$$

نلاحظ أن: $\vec{OA}$ متجه متغير الطول وثابت المنحى (مشتقه محمول على OA) وبما أن A ينزلق على Oz وبالتالي يتعين موضع A بوسيط واحد هو z_A.

- و $\vec{Am}$ متجه ثابت الطول وثابت المنحى (مشتقه صفراً)

- $\vec{mM}$ متجه طوله ثابت ومنحاه متغير (مشتقه عمودي عليه) وهو يتعين بوسيط واحد هو زاوية دورانه φ حول Oz.

وبالتالي فإن حركة النقطة M تتعين بوسيطين : z_A و φ وتكون معادلتا الحركة:

$z = z_A(t)$: معادلة حركة A على محور الدوران

$\varphi = \varphi(t)$: معادلة حركة M حول محور الدوران

نلاحظ أن بعد M عن محور الدوران ثابت وبالتالي فالمسارات هي منحنيات مرسومة على اسطوانات دورانية حول محور الدوران (محورها)

تعيين السرعة : نشتق العلاقة (1) بالنسبة للزمن :

$$\boxed{\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \vec{mM}} \quad (2)$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge (\vec{mO} + \vec{OM}) = \vec{v}(A) + \underbrace{\vec{\varphi}' \wedge \vec{mO}}_{=0} + \vec{\varphi}' \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \vec{OM}$$

أي أن متجه السرعة لأي نقطة من الجسم هو حاصل جمع متجهين متعامدين :

المتجه الأول هو متجه سرعة A في الحركة الانسحابية وهو محمول على محور الدوران

المتجه الثاني هو متجه سرعة دوران M حول محور الدوران (الحركة الدورانية) وهو عمودي على محور الدوران

يمكن كتابة السرعة بالشكل التالي : $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \vec{OM}$

تعيين التسارعات : باشتقاق العلاقة (2) :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \vec{mM} + \vec{\varphi}' \wedge (\vec{\varphi}' \wedge \vec{mM})$$

باستخدام علاقة جيبس :

$$\vec{\varphi}' \wedge (\vec{\varphi}' \wedge \vec{mM}) = \underbrace{(\vec{\varphi}' \cdot \vec{mM})}_{0} \cdot \vec{\varphi}' - \varphi'^2 \vec{mM}$$

$$= -\varphi'^2 \vec{mM}$$

بالتعويض في علاقة التسارع :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \vec{mM} - \varphi'^2 \vec{mM}} \quad (3)$$

ويمكن كتابتها أيضاً بالشكل :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge (\vec{mO} + \vec{OM}) + \vec{\varphi}' \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \vec{OM} + \vec{\varphi}' \wedge \vec{v}(M)$$

ونلاحظ من العلاقة (3) أن متجه التسارع هو حاصل جمع متجهين :

الأول هو التسارع الناتج عن الحركة الانسحابية (الانزلاق المحور على نفسه)

المتجه الثاني هو التسارع الناتج عن دوران الجسم حول المحور ،

الدراسة التحليلية للحركة :

لتكن احداثيات النقطة M بالنسبة للمحاور المتحركة والثابتة على الترتيب هي :

(X, Y, Z) و (x, y, z) واحداثيات A هي $(0, 0, z_A)$ فيكون :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

لدينا :

$$\vec{I} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{J} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{K} = \vec{k}$$

$$\vec{OM} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + z_A\vec{k}) + X(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + Y(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) + Z\vec{k}$$

تكون مركبات OM في الجملة الثابتة :

$$\left\{\begin{aligned} x &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi \\ z &= Z + z_A \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

وتتعين الحركة بمعادلتي الحركة :

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) \\ z_A &= z(t) \end{aligned}\right]$$

من المعادلتين الأولى والثانية في العلاقة (4) نجد أن :

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

أي أن المسارات مرسومة على أسطوانات دورانية محورها oz .

<u>تعيين السرعة في الجملة الثابتة :</u>

تتعين مركبات متجه السرعة للنقطة M على جملة المحاور الثابتة من الاشتقاق

$$\vec{v}(M) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(M) = \left\{\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\varphi}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = -\dot{\varphi}y \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) = \dot{\varphi}x \\ \dot{z} &= \dot{z}_A \end{aligned}\right.$$

أو يمكن الحصول على متجه السرعة باستخدام القانون :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{OM} = \dot{z}_A\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi}=\omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -\dot{\varphi}y\,\vec{i} + \dot{\varphi}x\,\vec{j} + \dot{z}_A\vec{k}$$

$$= \underbrace{-\dot{\varphi}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi)}_{v_x}\vec{i} + \underbrace{\dot{\varphi}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)}_{v_y}\vec{j} + \underbrace{\dot{z}_A}_{v_z}\vec{k}$$

تعيين التسارعات في الجملة الثابتة :

تعيين مركبات متجه التسارع للنقطة M على الجملة الثابتة بالاشتقاق المباشر لمتجه السرعة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{cases} x'' = -\varphi''(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) - \varphi'^2(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) \\ y'' = \varphi''(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) - \varphi'^2(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) \\ z'' = z''_A \end{cases}$$

أو يمكن الحصول على متجه التسارع باستخدام القانون :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \vec{OM} + \vec{\varphi}' \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = z''_A \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon = \varphi'' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega = \varphi' \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon y - \omega v_y)\vec{i} + (\varepsilon x + \omega v_x)\vec{j} + z''_A \vec{k}$$

بالتعويض نحصل على نفس النتيجة .

تعيين السرعة في الجملة المتحركة (المتماسكة مع الجسم) :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = z_A \vec{K} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

في الجملة المتماسكة (المتحركة) مع الجسم تتعين السرعة من القانون :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = z'_A \vec{K} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega = \varphi' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = -\varphi' Y \vec{I} + \varphi' X \vec{J} + z'_A \vec{K}$$

تعيين التسارعات في الجملة المتحركة :

تعيين التسارعات في الجملة المتحركة بالقانون :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \vec{OM} + \vec{\varphi}' \wedge \vec{v}(M)$$

$$= z''_A \vec{K} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \varepsilon = \varphi'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega = \varphi' \\ -\varphi' Y & \varphi' X & z'_A \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon Y - \omega^2 X)\vec{I} + (\varepsilon X - \omega^2 Y)\vec{J} + z''_A \vec{K}$$

حالة خاصة من الحركة الدورانية حول محور منزلق (الحركة اللولبية)

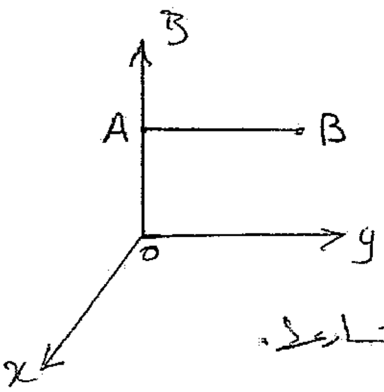
إذا كانت حركة النقطة A تابعاً خطياً لزاوية الدوران φ أي أن:

$$z = b\varphi + c$$

حيث b و c ثابتان

فتسمى الحركة بالحركة اللولبية وتتعين هذه الحركة بوسيط واحد هو φ.
وكل نقطة من الجسم ترسم لولباً دورانياً مرسوماً على اسطوانة دورانية محورها Oz

- إذا كانت φ تابعاً خطياً للزمن ($\varphi = dt + \alpha$) حيث d و α ثوابت فتسمى الحركة بالحركة اللولبية المنتظمة (أي أن متجه الدوران $\vec{\varphi}$ يكون ثابت)
فإن عبارة السرعة لا تتغير أما عبارة التسارع تتغير ويكون $\varepsilon = 0$ ويكون التسارع فقط تسارع ناظمي: $\vec{\Gamma}_n(M) = -\omega^2 \overrightarrow{mM}$



تمرين: AB قضيب طوله l فيه النقطة A تدرج المحور الثابت Oz بسرعة ثابتة v.
والنقطة B تدور حول النقطة A بسرعة زاوية ثابتة ω بحيث يبقى AB عمودياً على المحور Oz.
والمطلوب: أوجد مسار النقطة B وسرعتها وتسارعها.

الحل:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$
$$\vec{OA} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + vt\vec{k}$$
$$\vec{AB} = l\cos\omega t\,\vec{i} + l\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$\vec{OB} = l\cos\omega t\,\vec{i} + l\sin\omega t\,\vec{j} + vt\,\vec{k}$$

$$x_B = l\cos\omega t \quad , \quad y_B = l\sin\omega t \quad , \quad z_B = vt$$

وهي المعادلات الوسيطية للولب منتظم نصف قطر اسطوانته l.

لايجاد السرعة نشتق:

$$x'_B = -l\omega\sin\omega t \,,\quad y'_B = l\omega\cos\omega t \,,\quad z'_B = v$$

$$v_B = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{l^2\omega^2 + v^2}$$

وهي كمية ثابتة.

أما متجه التسارع:

$$x''_B = -l\omega^2\cos\omega t \,,\quad y''_B = -l\omega^2\sin\omega t \,,\quad z''_B = 0$$

وهو متجه عمودي على المحور Oz

$$\Gamma_B = \sqrt{l^2\omega^4} = l^2\omega^2$$