كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* راسب الدالة عند اللانهاية $z=\infty$:

يقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند $z=\infty$ إذا كانت الدالة $\varphi(\varepsilon)=f(\frac{1}{\varepsilon})$ تحليلية في النقطة $\varepsilon=0$

على سبيل المثال: $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ تحليلية في النقطة $z=\infty$ لأن الدالة $\varphi(\varepsilon)=f(\frac{1}{\varepsilon})=\sin\varepsilon$ تحليلية عند $\varepsilon=0$

- يقال أن الدالة $f(z)$ تمتلك نقطة شاذة معزولة $z=\infty$ إذا وُجِدَ جوار لهذه النقطة لا يحوي سواها نقطة شاذة

مثال: الدالة $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ تمتلك عدد لانهائي من النقاط الشاذة $z_k=k\pi$

$z=\infty$, $k\to\infty$ نقول عن $z=\infty$ هي شاذة قابلة للازالة أو (قطب) أو (أساسية) للدالة $f(z)$ وذلك حسب محدودية وجود نهاية $\lim_{z\to\infty} f(z)$

مبرهنة: إذا كانت $z=\infty$ نقطة شاذة قابلة للازالة للدالة $f(z)$ بالتالي منشور لوران للدالة $f(z)$ في جوار هذه النقطة لا يحوي قوى موجبة لـ z

* وإذا كانت $z=\infty$ نقطة شاذة قطب بالتالي منشور لوران يحوي عدد من القوى الموجبة لـ z

* وإذا كانت $z=\infty$ نقطة شاذة أساسية بالتالي منشور لوران للدالة $f(z)$ في جوار هذه النقطة يحوي على عدد لانهائي من الحدود ذات الأسس الموجبة لـ z.

- تكن الدالة $f(z)$ تحليلية في الجوار الموجود لنقطة $z=\infty$ بالتالي راسب الدالة $f(z)$ في هذه النقطة يُعطى بالعلاقة:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz \quad \dots(1)$$

حيث γ هي دائرة كبيرة بما فيه

الكمادية ..... $\oint_{|z|=r}$ ..... (الاتجاه مع عقارب الساعة)

من هذا التعريف يتبع أنّ راسب الدالة عند اللانهاية يساوي معامل z^{-1} في منشور لوران للدالة $F(z)$ في جوار $z=\infty$ مضروباً بالاشارة سالب

$$res\, f(\infty) = -c_{-1} \quad \dots (2)$$

مثال: أوجد راسب الدالة $f(z)=\frac{z+1}{z}$ في نقطة اللانهاية

الحل: منشور لوران للدالة $f(z)$ في جوار $z=\infty$

$$f(z) = 1+\frac{1}{z}$$

$$res\, f(\infty) = -c_{-1} = -1 \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = 1+0 = 1 \Rightarrow z=\infty$$

نقطة شاذة قابلة للازالة

مبرهنة: إذا كانت الدالة $F(z)$ تمتلك عدد محدود من النقاط الشاذة في المستوي العقدي وبالتالي فإنّ مجموع كل رواسبها (البقايا) بما في ذلك عند اللانهاية يساوي الصفر أي: إذا كانت $a_1, \dots, a_n$ نقاط شاذة معزولة للدالة $F(z)$ حيث n محدودة بالتالي

$$res\, f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} res\, f(a_i) = 0$$

$$\Rightarrow res\, f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_i) \quad \dots (3)$$

مثال: احسب قيمة التكامل باستخدام مفهوم الراسب عند اللانهاية:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$$

الحل: $z_1=1$ و $z_2=-1$ داخل الدائرة $|z|=3$ وحسب نظرية كوشي للرواسب:

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz = 2\pi i \left[res\, f(1) + res\, f(-1)\right] = -2\pi i\, res\, f(\infty) = 2\pi e i$$

$$\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}\cdot e^z = \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\dots\right]\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\dots\right]$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z