كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : ٤+٥/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

خواص الحلقات:

(1) إذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة فإنّه يتحقق ما يلي:

$\forall a\in R \Rightarrow a\cdot a = 0 \;\&\; a\cdot 0 = 0$

(2) $\forall a\in R, x\in R \Rightarrow (-a)x = -(ax) = a(-x)$

(3) $\forall x,y,a\in R \Rightarrow a(x-y) = ax - ay$

(4) $\forall a,b\in R \Rightarrow (-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

(5) $\forall a,b\in R \;\&\; m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m(a\cdot b) = (ma)\cdot b = a(mb)$

(6) $\forall a,b\in R \;\&\; m,n\in\mathbb{Z} \Rightarrow (m\cdot n)(a\cdot b) = (na)\cdot(mb)$

البرهان:

(1) $0\cdot a = (0+0)a = 0a + 0a \Rightarrow 0\cdot a = 0\cdot a + 0\cdot a$

$0 + 0\cdot a = 0\cdot a + 0\cdot a \Rightarrow 0\cdot a = 0$

لأن $(R,+)$ زمرة تبديلية

ويمكن الطريقة البرهان الطرف الثاني $(a\cdot 0 = 0)$

(2) $ax + (-a)x = (a + (-a))x = 0x = 0 \Rightarrow (-a)x = -ax$

$\Leftrightarrow$ أي أن نظير ax هو $(-a)x$

ويمكن الطريقة أن $-(ax) = a(-x)$

(3) $a(x-y) = ax + a(-y) = ax - ay$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$ (4)

(5)

$m(a \cdot b) = \underbrace{ab + ab + \dots + ab}_{m \text{ مرة}} = a(\underbrace{b + b + \dots + b}_{m \text{ مرة}})$

$m(a \cdot b) = a(mb)$

أو

$m(a \cdot b) = (\underbrace{a + \dots + a}_{m \text{ مرة}})b = (m \cdot a)b$

(6)

$(n \cdot m)a \cdot b = n(m(a \cdot b)) = n(a(mb))$

$(n \cdot m)a \cdot b = (na)(mb)$

تعريف:

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من الحلقة $(R, +, \cdot)$ نعرف مجموعهما كما يلي:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$$

ونعرف جداؤهما كما يلي:

$$A \cdot B = \{\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_i \mid a_i \in A \ \& \ b_i \in B \quad \forall i = \overline{1, n}\}$$

تمرين: لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ولتكن A و B زمرتين جزئيتين من الزمرة $(R, +)$ بين أن كلاً من $A + B$ و $A \cdot B$ زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$

أ) إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية و A و B حلقتين جزئيتين من الحلقة $(R, +, \cdot)$ بين أن $A \cdot B$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$

أ) هل $A + B$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, \cdot)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: 1) $(A+B, +)$ زمرة (واضحة)

2) لنبرهن أن $(A.B, +)$ زمرة جزئية.

أ) واضح أن $A.B \subset R$ و $A.B \neq \phi$ لأن $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$

ب)

$$\forall x, y \in A.B \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i \quad \& \quad y = \sum_{j=1}^{m} a'_j . b'_j$$

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i - \sum_{j=1}^{m} a'_j . b'_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_i . b_i + \sum_{j=1}^{m} -(a'_j . b'_j)$$

$$\Rightarrow x - y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\in A} . \underbrace{b_i}_{\in B} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(-a'_j)}_{\in A} \underbrace{b'_j}_{\in B} \in A.B$$

بما أن $(A.B, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R, +)$ فإن $(A.B, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, .)$ إذا تحقق:

~~$x.y$~~ $x, y \in A.B \quad \forall x, y \in A.B$

$$\forall x, y \in A.B \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i \quad \& \quad y = \sum_{j=1}^{n} a'_j . b'_j$$

$$x.y = x \sum_{j=1}^{n} a'_j . b'_j = \sum_{j=1}^{m} x(a'_j . b'_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i)(a'_j . b'_j)$$

$$x.y = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i . a'_j . b'_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i . a'_j}_{\in A} \underbrace{b_i . b'_j}_{\in B} \in A.B$$

$\Leftarrow$ $(A.B, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R, +, .)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالنسبة لـ $(A+B,+,\cdot)$ علينا أن نتحقق من الشرط:

$$\forall x,y \in A+B \Rightarrow x\cdot y \in A+B$$

وذلك كون $(A+B,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R,+)$

$$\forall x,y \in A+B \Rightarrow x=a+b \ \& \ y=a'+b'$$

حيث $a,a' \in A$ ، $b,b' \in B$

$$\Rightarrow x\cdot y=(a+b)(a'+b')=aa'+ab'+ba'+bb'$$

$$\Rightarrow x\cdot y \notin A+B$$

لأن ab' و ba' ليس بالضرورة أن يكونا عنصرين من A و B وبالتالي $x\cdot y \in A+B$ في الحالة العامة، وهذا $A+B$ ليس حلقة جزئية من الحلقة R.

تمرين: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة تبديلية واحدية (ذات عنصر وحدة) ولتكن $(B,+,\cdot)$ حلقة جزئية من R ذات عنصر وحدة $1'$.

إذا مررنا أي عنصر وحدة في $(R,+,\cdot)$ ينتمي إلى $(B,+,\cdot)$ فإن $1'$ هو العنصر الصفر في الحلقة $(R,+,\cdot)$

الحل:

نرمز لصفر الحلقة $(R,+,\cdot)$ بـ 0 وبما أن $1'$ عنصر الوحدة في R وينتمي إلى B فإن $1'$ يمكن أن يكون عنصر وحدة في R، ومن ثم فإنه يوجد في R عنصرين مختلفين a,b بحيث:

$$1'\cdot a=b \Rightarrow 1'(1'a)=1'\cdot b \Rightarrow (1'\cdot 1')a=(1'\cdot b)$$

$$1'a=1'\cdot b \Rightarrow 1'\cdot a-1'b=0 \Rightarrow 1'(a-b)=0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أنه $a-b \in R$ و $a-b \neq 0$ فإن a و b عنصران مختلفان في R وبالتالي 1 قاسم للصفر في R.

تمرين 1:

* الصورة المباشرة وفق f (تشاكل) لأي حلقة جزئية من $(A,+,\cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(B,T,*)$
* الصورة العكسية وفق f (تشاكل) لأي حلقة جزئية $(B,T,*)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$

البرهان:

* لتكن $(A_1,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ عندئذٍ فإن: $f(A_1) \subset B$ و $f(A_1) \neq \phi$ و واضح أنه:

$0 \in A_1 \Rightarrow 0' = f(0) \in f(A_1) \Rightarrow f(A_1) \neq \phi$

ب) $\forall x,y \in f(A_1) \Rightarrow \exists a,b \in A_1 ;$

$x = f(a)$ و $y = f(b)$

$\Rightarrow xT(-y) = f(a)T(-f(b)) = f(a)Tf(-b)$

$= f(a+(-b)) = f(a-b) \in f(A_1)$

$\in A_1$

$\Rightarrow xT(-y) \in f(A_1)$

ج) $\forall x,y \in f(A_1) \Rightarrow \exists a,b \in A_1 ; x = f(a)$ و $y = f(b)$

$\Rightarrow x*y = f(a)*f(b) = f(a\cdot b) \in f(A_1)$

$\in A_1$

$\Rightarrow x*y \in f(A_1)$

من أ- ب- ج نجد أن $(f(A_1),T,*)$ حلقة جزئية من الحلقة $(B,T,*)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

A ليكن $(B_1, T, *)$ حلقة جزئية من الحلقة $(B, T, *)$ و $f: A \to B$ تشاكل.
ليرهن أن $f^{-1}(B_1)$ حلقة جزئية من الحلقة A

أ- واضح أن $f^{-1}(B_1) \subset A$ و $f^{-1}(B_1) \neq \phi$ لأن:
$0' \in B$ و $0 = f^{-1}(0) \Rightarrow 0 \in f^{-1}(B_1)$

ب- $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x_1) \in B_1$ و $f(x_2) \in B_1$
$\Rightarrow f(x_1) T (-f(x_2)) \in B_1$ لأن B_1 حلقة
$\Rightarrow f(x_1) T f(-x_2) \in B_1$
$\Rightarrow f(x_1 + (-x_2)) \in B_1 \Rightarrow f(x_1 - x_2) \in B_1$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \in f^{-1}(B_1)$

ج-
$\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in B_1$
$\Rightarrow f(x_1) * f(x_2) \in B_1$ لأن B_1 حلقة
$f(x_1 . x_2) \in B_1 \Rightarrow x_1 . x_2 \in f^{-1}(B_1)$
من أ، ب، ج نجد أن $(f^{-1}(B_1), T, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, .)$

تمرين 2:

ليكن $\{B_i\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من المثاليات في الحلقة $(A, +, .)$ بين أن $\bigcap_{i \in I} B_i$ مثالية في الحلقة $(A, +, .)$

الحل:

أ- واضح أن $\bigcap_{i \in I} B_i \subset A$, $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \phi$ لأن:

$0 \in B_i \ \forall i \in I$ (B_i مثالية) $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \ni 0 \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \neq \phi$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب- $\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} B_i \Rightarrow x \in B_i \;\&\; y \in B_i \quad \forall i \in I$

وبما أنّ B_i مثالية $\forall i \in I$ فإنّ:

$x - y \in B_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow x-y \in \bigcap_{i\in I} B_i$

ج-

$\forall x \in \bigcap_{i\in I} B_i \;\&\; a \in A \Rightarrow x \in B_i \quad \forall i \in I$

$\Leftarrow \forall i \in I$ وبما أنّ B_i مثالية

$ax \in B_i \quad \forall i \in I$

$xa \in B_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x.a \\ a.x \end{matrix}\right\} \in \bigcap_{i\in I} B_i$

$\Leftarrow$ من ب، ج نجد أنّ $\bigcap_{i=1} B_i$ مثالية من A.

تمرين 3:

ليكن $\{B_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المثاليات (المتتهية أو غير المتتهية) من حلقة ما A ليرمز $\sum_{i\in I} B_i$ لمجموع كل العناصر التي هي من الشكل:

$\{\sum_{i=1} x_i \mid x_i \in B_i \;\&$ جميع x_i أعداد باستثناء عدد متتهي منهم $\}$

أثبت أنّ $\sum_{i\in I} B_i$ مثالية من الحلقة $(A, +, .)$

الحل:

ليكن P هو الخاص بأن $\sum_{i\in I} B_i \subset A$ و $\sum_{i\in I} B_i \neq \phi$

$0 \in B_i \;\forall i \in I \Rightarrow 0 \in \sum_{i\in I} B_i \Rightarrow \phi \neq \sum_{i\in I} B_i \subset A$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب- $\forall x, x' \in \sum_{i\in I} B_i \Rightarrow x = \sum_{i\in I} x_i$ و $x' = \sum_{i\in I} x'_i$

حيث $\forall i\in I: x_i, x'_i \in B_i$ ، x_i و جميع x_i ، x'_i أصفار ما عدا عدد منتهي منهم.

بما أنّ $x_i, x'_i \in B_i$ و جميع x_i ، x'_i أصفار ما عدا عدد منتهي منهم $\Leftarrow$

$x_i - x'_i \in B_i \quad \forall i\in I$

وجميع $x_i - x'_i$ أصفار ما عدا عدد منتهي منها.

وبالتالي:

$$\sum_{i\in I}(x_i - x'_i) \in \sum_{i\in I} B_i \Rightarrow \sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in I} x'_i \in \sum_{i\in I} B_i$$

$$x - x' \in \sum_{i\in I} B_i$$

ج) $\forall x \in \sum_{i\in I} B_i$ و $a\in A \Rightarrow$

$x = \sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in B_i \quad \forall i\in I$

وجميع x_i أصفار ما عدا عدد منتهي منهم

$$\Rightarrow a\cdot x = a\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} a x_i \in \sum_{i\in I} B_i$$

$$x\cdot a = \left(\sum_{i\in I} x_i\right) a = \sum_{i\in I} x_i\, a \in \sum_{i\in I} B_i$$

وبما أنّ $B_i \ \forall i\in I$ مثالية $\Leftarrow$

$x_i a \in B_i$ ، $a x_i$ و لدينا أيضاً جميع x_i ما عدا عدد منتهي منها أصفار $\Leftarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كل حدٍ $x_i q$ ، $q x_i$ أصغر ما عدا عدد منتهي منهم

$\Rightarrow a \cdot x \, , \, x \cdot q \in \bigcap_{i \in I} B_i$

ومن p وبهذا نجد أن $\bigcap_{i \in I} B_i$ مثالية في A

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة