كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العمليات على المثاليات:

1) العملية الأولى على المثاليات هي عملية جمع المثاليات:

لتكن B_1 و B_2 مثاليين من حلقة $(A, +, \cdot)$ عندئذٍ:

$$B_1 + B_2 = \{x \in A \mid x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in B_1 , x_2 \in B_2\}$$

مبرهنة:

لتكن B_1 و B_2 مثاليين من حلقة $(A, +, \cdot)$ عندئذٍ فإن $B_1 + B_2$ مثالي من الحلقة $(A, +, \cdot)$.

البرهان:

أ) واضح أن $B_1 + B_2 \subset A$ و $B_1 + B_2 \neq \phi$ لأن:

$B_1 \neq \phi \; , \; B_2 \neq \phi$

ب) $\forall x, y \in B_1 + B_2 \Rightarrow$

$x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in B_1 \; \& \; x_2 \in B_2$

$\&$

$y = y_1 + y_2 \; ; \; y_1 \in B_1 \; \& \; y_2 \in B_2$

$\Rightarrow x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in B_1} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{\in B_2}$

$\in B_1 + B_2$

ج)

$\forall a \in A \; ; \; x \in B_1 + B_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in B_1 \; \& \; x_2 \in B_2$

$\Rightarrow$ $ax = a(x_1 + x_2) = \underset{\in B_1}{ax_1} + \underset{\in B_2}{ax_2} \in B_1 + B_2$

$xa = (x_1 + x_2)a = \underset{\in B_1}{x_1 a} + \underset{\in B_2}{x_2 a} \in B_1 + B_2$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أنّ $B_1 + B_2$ مثالية من $(A, +, .)$

2 العلبة الثانية على المثاليات هي عملية التقاطع:

لتكن B_1, B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A, +, .)$ عندئذٍ:

$B_1 \cap B_2 = \{x \in A \mid x \in B_1 \ \& \ x \in B_2\}$

برهنة:

لتكن B_1 و B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A, +, .)$ فإنّ $B_1 \cap B_2$ مثالية من الحلقة $(A, +, .)$

البرهان:

أ) نفرض أن $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ & $B_1 \cap B_2 \subset A$ ونبيّن: $0 \in B_1 \cap B_2$

بما أنّ $0 \in B_1$ & $0 \in B_2$

ب)

$\forall x, y \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in B_1 \ \& \ x \in B_2 \\ y \in B_1 \ \& \ y \in B_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x - y \in B_1$ & $x - y \in B_2$

$\Rightarrow x - y \in B_1 \cap B_2$

ج)

$\forall a \in A : x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow x \in B_1$ & $x \in B_2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow \begin{cases} ax \in B_1 \ \& \ ax \in B_2 \\ xa \in B_1 \ \& \ xa \in B_2 \end{cases}$

$\Rightarrow ax \in B_1 \cap B_2 \ \& \ xa \in B_1 \cap B_2$

بما أن $B_1 \cap B_2$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ حيث $(\forall a \in A)(\forall x \in B_1 \cap B_2)$

مبرهنة: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة ما، إذا كانت B_1, B_2, B_3 ثلاث مثاليات من الحلقة $(A, +, \cdot)$ وإذا علمنا أن $B_2 \subset B_1$ عندئذٍ فإن:

$$B_1 \cap (B_2 + B_3) = B_2 + (B_1 \cap B_3)$$

3) العملية الثالثة على المثاليات هي عملية الجداء:

تعريف: لتكن B_1, B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A, +, \cdot)$ نسمي الجموعة:

$$B_1 \cdot B_2 = \{x \in A \mid \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ; \ x_i \in B_1, y_i \in B_2, n \in Z^+\}$$

جداء B_1 و B_2

برهنة:

لتكن B_1, B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A, +, \cdot)$ فإن $B_1 \cdot B_2$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

ملاحظات:

① لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة ما ولتكن B_1, B_2, B_3 مثاليات من الحلقة $(A, +, \cdot)$ عندئذٍ فإن:

- $B_1 \cdot (B_2 + B_3) = B_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot B_3$
- $(B_1 + B_2) B_3 = B_1 \cdot B_2 + B_2 \cdot B_3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② لتكن B_1, B_2 مثاليين من حلقة ما $(A, +, \cdot)$ ، يكفي البرهان بسهولة أنّ:

$$B_1 \cdot B_2 \subset B_1 \cap B_2$$

[4] العملية الرابعة على المثاليات هي عملية القسمة:

تعريف: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ما، إذا كانت B_1, B_2 فإنّ المجموعة:

$$\{x \in A \mid x \cdot B_2 \subset B_1\}$$

تسمّى حاصل قسمة B_1 على B_2 ونرمز لها $B_1 : B_2$

مبرهنة:

لتكن B_1, B_2 مثاليين من حلقة تبديلية ما $(A, +, \cdot)$ إنّ $B_1 : B_2$ مثالي من الحلقة $(A, +, \cdot)$ تحوي B_1

البرهان:

أ- واضح أن $B_1 : B_2 \subset A$ & $B_1 : B_2 \neq \emptyset$ لأن $0 B_2 = \{0\} \subset B_1$ ومنه $0 \in B_1 : B_2$

ب-

$$\forall x, y \in B_1 : B_2 \Rightarrow x B_2 \subset B_1 \ \& \ y B_2 \subset B_1$$
$$\Rightarrow x B_2 - y B_2 \subset B_1$$
$$\Rightarrow (x - y) B_2 \subset B_1$$
$$\Rightarrow x - y \in B_1 : B_2$$

ج-

$$\forall x \in A ; x \in B_1 : B_2 \Rightarrow x B_2 \subset B_1$$
$$\Rightarrow a(x B_2) \subset a B_1 \subset B_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow (ax)B_2 \subset B_1 \Rightarrow ax \in B_1 : B_2$

ب

$\forall b \in B_1 \Rightarrow bB_2 \subset B_1$

$\Rightarrow b \in B_1 : B_2$

$\Rightarrow B_1 \subset B_1 : B_2$

من (P) و(ب) و(ج) و(د) نجد أنّ $B_1 : B_2$ مثالية من $(A, +, \cdot)$ حوي B_1.

5 العلية الخاصة على المثاليات:

تعريف: لتكن B مثالية من حلقة تبديلية ما $(A, +, \cdot)$ إنّ المجموعة: $\{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ ; x^n \in B\}$ تسمّى جذور المثالية B ويرمز لها بالرمز $\sqrt{B}$

برهنة:

لتكن B مثالية من حلقة تبديلية ما $(A, +, \cdot)$ إنّ $\sqrt{B}$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ حوي B

* تشكيل حلقة القسمة:

لتكن B مثالية من حلقة ما $(A, +, \cdot)$، بما أنّ B مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ فإنّ $(B, +)$ زمرة جزئية تبديلية من $(A, +)$ إذاً: $(B, +)$ زمرة ناظمية ومنه فإنّ $(A|B, +)$ زمرة تبديلية حيث إنّ:

$$A|B = \{x + B \mid x \in A\}$$

حيث $(+)$ هي عملية جبرية ثنائية معرفة على $A|B$ بالشكل:

$$(x + B) + (y + B) = (x + y) + B \quad \forall x, y \in A$$

$x-y \in B \iff x+B = y+B$

- العنصر الحيادي في A/B هو B لأنّ:

$$(x+B)+B = (x+0)+B = x+B$$

↳ A/B مغلقة الزمرة

- $-(x+B) = -x+B$

فإذا عرفنا على المجموعة A/B العملية $(\cdot)$ بالشكل:

$$(x+B)\cdot(y+B) = xy+B \quad \forall x,y \in A$$

عندئذٍ تكون $(\cdot)$ معرفة جيداً لأنّه إذا كانت x_1, x_2, y_1, y_2 عناصر من A بحيث أنّ:

$$x_1+B = x_2+B$$

$$y_1+B = y_2+B$$

$$\begin{cases} x_1y_1+B = x_2y_2+B \\ \Rightarrow x_1y_1 - x_2y_2 \in B \end{cases} \quad ???$$

$$\Rightarrow x_1-x_2 \in B \ \& \ y_1-y_2 \in B$$

$$\Rightarrow x_1y_1 - x_2y_2 = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_2 - x_2y_2$$

$$= x_1\underbrace{(y_1-y_2)}_{\in B} + \underbrace{(x_1-x_2)}_{\in B}y_2 \in B$$

$$\Rightarrow x_1y_1+B = x_2y_2+B$$

بالإضافة إلى ذلك: إذا عرفنا x,y,z عناصر من A فإنّ:

$$(x+B)[(y+B)\cdot(z+B)] = (x+B)(yz+B)$$

$$= x(yz)+B = (xy)+B = (xy+B)(z+B)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= [(x+B)\cdot(y+B)](z+B)$

ب)

$(x+B)[(y+B)+(z+B)] = (x+B)[(y+z)+B]$

$= x\cdot(y+z)+B$

$= (xy+xz)+B = x\cdot y+B+x\cdot z+B$

$= (x+B)(y+B)+(x+B)(z+B)$

ج)

$[(y+B)+(z+B)](x+B) = [(y+z)+B](x+B)$

$= (y+z)\cdot x+B$

$= (y\cdot x+z\cdot x)+B$

$= (y\cdot x+B)+(z\cdot x+B)$

$= (y+B)(x+B)+(z+B)(x+B)$

وبهذه الطريقة $(A|B, +, \cdot)$ حلقة وتسميها حلقة القسمة لـ A على B

ملاحظات:

1) لتكن B مثالية في حلقة $(A, +, \cdot)$، إذا كانت $(A, +, \cdot)$ تبديلية فإن $(A|B, +, \cdot)$ حلقة تبديلية لأن تكون تبديلية

$\forall x, y \in A \Rightarrow (x+B)\cdot(y+B) = xy+B$

$= yx+B$

$= (y+B)(x+B)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) لتكن B مثالية بـ حلقة ا $(و, +, \cdot)$ ، وإذا كانت الحلقة $(A, +, \cdot)$ ذات عنصر وحدة 1 ، فإن الحلقة $(A/B, +, \cdot)$ تكون حلقة واحدية لأن:

من جهة أولى:

$$1 + B \in A/B$$

ومن جهة ثانية فإن:

$$\forall x \in A \Rightarrow (x+B).(1+B)$$

$$= x.1 + B$$

$$= x + B$$

$$= 1.x + B$$

$$= (1+B).(x+B)$$

انتهت المبرهنة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z