كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

برهنة:

لتكن $(A, +, \cdot)$ و $(B, T, *)$ حلقتين واء، ولنرمز لصفر الحلقتين بـ o و o' على الترتيب؛ إذا كانت f هومومورفيزم للحلقة $(A, +, \cdot)$ في الحلقة $(B, T, *)$ فإنّ:

1) $f(o) = o'$

2) $\forall a \in A \Rightarrow f(-a) = -f(a)$

3) $(\ker f, +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(A, +, \cdot)$

4) الصورة المباشرة وفق f لأي حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(B, T, *)$

5) الصورة المكسية وفق f لأي حلقة جزئية من الحلقة $(B, T, *)$ هي حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

البرهان:

1) $f(o) = f(o+o) = f(o) T f(o)$

~~$f(o) T o' = f(o) T f(o)$~~

$\Rightarrow f(o) = o'$

2) $a + (-a) = o$

$\Rightarrow f(a + (-a)) = f(o)$

$\Rightarrow f(a) T f(-a) = o'$

$\Rightarrow -f(a) = f(-a)$

3- ولنبرهن أن $\ker f \subseteq A$ & $\ker f \neq \phi$ لأنّ :

$0 \in \ker f$ ومنه $f(0) = 0'$

أ- $\forall x, y \in \ker f \Rightarrow f(x) = f(y) = 0'$

$\Rightarrow f(x-y) = f(x) \top f(-y) = f(x) \top f(-f(y))$

$= 0' \top 0' = 0'$

$\Rightarrow x - y \in \ker f$

ب- $\forall x, y \in \ker f \Rightarrow f(x) = f(y) = 0'$

$\Rightarrow f(x \cdot y) = f(x) \star f(y) = 0' \star 0' = 0'$

$\Rightarrow x \cdot y \in \ker f$

من البرهان السابق نجد أن $(\ker f, +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(A, +, \cdot)$ (4) و (5) الحل

مبرهنة: لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1 وليكن a عنصراً من A وله مقلوب في A بالنسبة للعملية $(\cdot)$ إذا كان f هومومورفيزم الحلقة $(A, +, \cdot)$ في الحلقة $(B, \top, \star)$ فإنّ :

1. $f(1)$ عنصر الوحدة في الحلقة $(f(A), \top, \star)$
2. $f(a^{-1})$ مقلوب $f(a)$ في $f(A)$ بالنسبة للعملية $(\star)$

البرهان:

1. ليكن y عنصراً ما من $f(A)$ ، عندئذٍ فإنّ :

$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \; ; \; y = f(x)$

$\Rightarrow y \star f(1) = f(x) \star f(1) = f(x \cdot 1) = f(x)$

& $f(1) \star y = f(1) \star f(x) = f(1 \cdot x) = f(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومنه نلاحظ أنّ: $f(1) \in f(A)$ فإنّ هذا يبين لنا أنّ $f(1)$ هو عنصر الوحدة في الحلقة $(f(A), T, *)$

2) لدينا: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$\Rightarrow f(a \cdot a^{-1}) = f(a^{-1} \cdot a) = f(1)$

$\Rightarrow f(a) * f(a^{-1}) = f(a^{-1}) * f(a) = f(1)$

ومنه نلاحظ أنّ: $f(a^{-1}) \in f(A)$ يبين لنا أنّ $f(a^{-1})$ تقلوب $f(a)$ في الحلقة $f(A)$ بالنسبة لعملية الجمع.

برهنة: لتكن $(A, +, \cdot)$ و $(B, T, *)$ حلقتين لـ a و b على الترتيب بـ 0 لصفر الحلقة $(A, +, \cdot)$ و $0'$ لصفر الحلقة $(B, T, *)$ و $(B, T, *)$ ليكن f هو هومومورفيزم الحلقة $(A, +, \cdot)$ في الحلقة $(B, T, *)$ الشرط اللازم والكافي لكي يكون f مونومورفيزم هو أن يكون $\ker f = \{0\}$

البرهان:

* لزوم الشرط: المعطى: f مونومورفيزم

المطلوب: $\ker f = \{0\}$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0' \Rightarrow f(x) = f(0)$ (أحادي) $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$

* كفاية الشرط: المعطى: $\ker f = \{0\}$

المطلوب: f مونومورفيزم

$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) T (-f(x_2)) = 0'$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0'$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

وبما أن f همومورفيزم فإنّ f يكون مونومورفيزم.

تمرين: لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر وحدة، ولنرمز لعنصر الوحدة فيها بـ 1، ولتكن Δ و Δ' عمليتي جبريتين ثنائيتين معرفتين على R بالشكل:

$x \Delta y = x + y + 1$ & $x \Delta' y = x + y + x.y$

من أجل كل x, y من R.

إنّ (R, Δ, Δ') حلقة (تأكد من ذلك). بيّن أنّ الحلقتين $(R, +, \cdot)$ و (R, Δ, Δ') أيزومورفيزميتان.

الحل:

لنعرف التطبيق: $f(R, \Delta, \Delta') \to (R, +, \cdot)$ بالشكل:

$f(x) = x + 1 \quad \forall x \in R$

(أ) $\forall x, y \in R \Rightarrow f(x \Delta y) = f(x + y + 1)$.

$= x + y + 1 + 1 = (x+1) + (y+1) = f(x) + f(y)$

(ب)

$\forall x, y \in R \Rightarrow f(x \Delta' y) = f(x + y + x.y)$

$= x + y + x.y + 1 = y(x+1) + (x+1) = (x+1)(y+1)$

$= f(x) \cdot f(y)$

(ج) إنّ f متباينة لأنّ:

$\forall x_1, x_2 \in R;\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

د- إن f غامر لأن:

$\forall y \in R \Rightarrow \exists y-1 \in R ; f(y-1) = y-1+1 = y$

من (أ) و (ب) و (ج) و (د) نجد أن f أيزومورفيزم، وبالتالي الحلقتين $(R, +, .)$ و (R, Δ, ∇) أيزومورفيزميات

المثاليات في الحلقات Ideal

تعريف:

1 المثالية اليسارية: لتكن $(A, +, .)$ حلقة ما، المثالية اليسارية B من الحلقة $(A, +, .)$ هي مجموعة جزئية غير خالية من A وتحقق الشرطين:

أ- $\forall b_1, b_2 \in B \Rightarrow b_1 - b_2 \in B$

ب- $\forall b \in B, a \in A \Rightarrow ab \in B$

2 المثالية اليمينية: لتكن $(A, +, .)$ حلقة ما، المثالية اليمينية B من الحلقة $(A, +, .)$ هي مجموعة جزئية غير خالية من A وتحقق الشرطين:

أ- $\forall b_1, b_2 \in B \Rightarrow b_1 - b_2 \in B$

ب- $\forall b \in B ; a \in A \Rightarrow ba \in B$

3 المثالية ثنائية الجانب: ليكن $(A, +, .)$ حلقة ما، المثالية ثنائية الجانب B من الحلقة $(A, +, .)$ هي مثالية يمينية ويسارية معاً.

★ ينتج من التعريف السابق أنّ كل مثالية يسارية أو يمينية في حلقة تبديلية تكون مثالية ثنائية الجانب من هذه الحلقة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ المجموعة $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$

مثالية ثنائية الجانب من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ لأنّ:

أ- واضح أنّ: $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \neq \emptyset$ $(n \in \mathbb{Z})$

ب- $\forall nx, ny \in n\mathbb{Z} \Rightarrow nx - ny = n(x-y) \in n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

ج- $\forall nx \in n\mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(nx) = n(ax) \in n\mathbb{Z}$
$\in \mathbb{Z}$

بما سبق نجد أنّ $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ مثالية ثنائية الجانب من $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ لأنّ $\mathbb{Z}$ تبديلية.

ملاحظات:

1) فيما سيأتي كل مثالية ثنائية الجانب سندعوها مثالية.

2) لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة بما أنّ كل مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ هي حلقة جزئية منها، إلا أنّه إذا كانت $(B, +, \cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ فليس من الضروري أن تكون B مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$

3) لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة ما.

إذا كانت $A \neq \{0\}$ فإنّ الحلقة $(A, +, \cdot)$ تحوي مثاليين على الأقل هما A و $\{0\}$

كل مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ تختلف عن المثاليين A و $\{0\}$ تسمّى مثالية غير مبتذلة من الحلقة $(A, +, \cdot)$

* كل حلقة لا تحوي أي مثالية غير مبتذلة تسمّى حلقة بسيطة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة ذات عنصر وحدة، ولتكن B مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ ولتكن b عنصراً من B.
إذا كان لـ b مقلوباً $\bar{b}$ في A بالنسبة للعملية $(\cdot)$ فإنّ $A=B$ وذلك لأنّه إذا كان a عنصراً ما من A، فإنّ

$$a = a.1 = a.\bar{b}.b = (a.\bar{b})\,b \in B$$
$$\in A \quad \in B$$

وبالتالي $A \subset B$ وبما أنّ $B \subset A$ فإنّ $A=B$

* ينتج من الملاحظة الأخيرة أنّه إذا كانت B مثالية من حلقة ما $(A,+,\cdot)$ ذات عنصر وحدة، وإذا كان $1 \in B$ فإنّ: $A=B$

(5) لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة ما، ولتكن $(B,+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ عندئذٍ تكون B مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall a \in A, b \in B \Rightarrow ab \in B \;\&\; ba \in B$$

مثال: في الحلقات $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$ كل زمرة جزئية A من $(\mathbb{Z}_n,\oplus)$ تكون مثالية من الحلقة $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$

الحل:

تكون الزمرة A مثالية من الحلقة $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$ إذا تحقق الشرط:

$$\forall r \in \mathbb{Z}_n,\ a \in A \Rightarrow r \odot a \in A$$

* نناقش الحالتين:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(أ) إذا كان $2 \circ 0 = 2$ ، فإنّ : $2 \circ a = 0 \circ a = 0 \in A$

محقق.

(ب) إذا كان $2 \neq 0$ ، فإنّ :

$$2 \circ a = \overline{2 \cdot a} = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{2 مرة}} = \underbrace{a \oplus a \oplus \cdots \oplus a}_{\text{2 مرة}} \in A$$

بما أن p و ب تحقق أن الشرط محقق وبالتالي فإن A مثالية في الحلقة $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z