كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الثالثة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

نحقق أن $(C_{[a,b]}, \|\ \|)$ هو فضاء منظم حيث $\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$

الحل:

لنتحقق من شروط الفضاء المنظم:

① $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt \geq 0$ واضح

② $\|x\| = 0 \iff \int_a^b |x(t)|\,dt = 0 \iff |x(t)| = 0 \iff x(t) = 0$

③ $\|\alpha(x(t))\| = \int_a^b |\alpha x(t)|\,dt = |\alpha| \int_a^b |x(t)|\,dt = \alpha \|x\|$

④ $\|x+y\| = \int_a^b |x(t)+y(t)|\,dt \leq \int_a^b |x(t)|\,dt + \int_a^b |y(t)|\,dt$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وبما مناقشة الشروط ①، ②، ③، ④ نجد أن $(C_{[a,b]}, \|\ \|)$ فضاء منظم.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

السؤال الثاني:

أثبت أن التطبيق: $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

المعرف بالشكل:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \ \& \ y = (y_1, \dots, y_n)$$

هو جداء داخلي.

الحل:

① $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

② $\langle x, x \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0 ; \ i = \overline{1,n}$

$\iff x_i = 0 ; \ i = \overline{1,n} \iff x = 0$

③ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = \langle y, x \rangle$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

④ $\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \alpha \langle x, y \rangle$

$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

⑤ $\langle x + y, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \xi_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i \xi_i + y_i \xi_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \xi_i = \langle x, \xi \rangle + \langle y, \xi \rangle$

$\langle x + y, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle + \langle y, \xi \rangle$

وبهذا تحقق الشرط 1, 2, 3, 4, 5 فيه أنه جداء داخلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثالث:

برهن أن الجداء الداخلي في أي فضاء إقليدي يحقق المتراجحة (متراجحة كوشي شوارتز)

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

الحل:

$$\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x, x-\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x-\alpha y\rangle$$

$$= \langle x-\alpha y, x\rangle + \langle x-\alpha y, -\alpha y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle + \langle x, -\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, \alpha y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - \alpha\langle y,x\rangle - \alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle$$

نفرض أن: $\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

$$\Rightarrow \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \geq 0 \iff \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$$

$$\langle x,x\rangle \geq \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \iff \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \geq \langle x,y\rangle^2$$

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

العلاقة بين الفضاءات المنظمة والمترية :

★ كل فضاء منظم هو فضاء متري :

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad \forall x,y \in X$$

★ البرهان :

المعطى : X فضاء منظم نظيمه $(\|\ \|)$

المطلوب : (X,d) فضاء متري

① $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$

من شروط الفضاء المنظم تحقق

② $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0$

من شروط الفضاء المنظم نجد أن :

$$x-y = 0 \Rightarrow x = y$$

③ $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\|$

$$d(x,y) = \|y-x\| = d(y,x)$$

④ $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\|$

من خواص النظيم :

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

بهذا انتهينا من البرهان أن كل فضاء منظم هو فضاء متري ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال على المكس: الفضاء المتري المتقطع:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

هو فضاء متري ولكنه ليس منظم.

العلاقة بين الفضاءات الإقليدية الحقيقية والمنظمة:

* كل فضاء إقليدي حقيقي هو فضاء منظم، نظيمه:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

* البرهان:

المعطى: E فضاء إقليدي حقيقي.

المطلوب: E فضاء منظم

① $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$

② $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

وذلك حسب شروط الفضاء الإقليدي.

③ $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; $\alpha \in R$ و $x \in E$

④ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

لكي برهان هذا الشرط يجب أن نبرهن متراجحة كوشي - بنكوفسكي بداء الداخلي:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = \langle \alpha x, \alpha x + y \rangle + \langle y, \alpha x + y \rangle$$

$$= \langle \alpha x + y, \alpha x \rangle + \langle \alpha x + y, y \rangle$$

$$= \alpha \langle \alpha x, x \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle \alpha x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \alpha^2 \langle x,x\rangle + 2\alpha\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = p(\alpha)$

$p(\alpha)$ تابع من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير α

وهو موجب دوماً أي أن إشارة α تتغير، $\Delta \leq 0$

$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$

$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$

$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}$

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

والآن نقوم لبرهان الشرط الرابع:

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$

$= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

حسب متراجحة كوشي - بنكوفسكي للجداء الداخلي:

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ليه تحقق الشروط 1، 2، 3، 4 نجد أن كل فضاء إقليدي هو فضاء متظم ولكن العكس غير صحيح ويكون العكس صحيح إذا تحققت علاقة متوازي الأضلاع.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ماهي العلاقة بين الفضاء الإقليدي والنظم والجداء الداخلي:

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم وكل فضاء نظم هو فضاء قروي.

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

السؤال الرابع:

أثبت أن النظيم يحقق المتراجحة:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$$

في الحالتين الآتيتين:

① إذا كان E فضاء جداء داخلي.

② إذا كان E فضاء منظم في الحالة العامة.

الحل:

(العلاقة بين الفضاء المنظم والجداء الداخلي)

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle$$

$$= \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle = \langle x-y, x\rangle + \langle x-y, -y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle -y, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle -y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

$$\geq (\|x\| - \|y\|)^2$$

$$\|x-y\|^2 \geq (\|x\| - \|y\|)^2$$

$$\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

② لدينا متراجحة المثلث دوماً صحيحة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

نبدل كل x بـ $x-y$ في هذه المتراجحة

$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ ـــــ *

نبدل كل y بـ x و y بـ x في المتراجحة السابقة:

$\|y\| \leq \|x\| + \|y-x\|$

$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\|$ ـــــ **

من * و ** نجد أن:

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

السؤال الخامس:

عين مجموعة تعريف كل من التوابع:

① $u = \sqrt{9-x^2-y^2}$

② $u = \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2}$

③ $f(x,y,z) = \arcsin(x+y+z)$

④ $f(x,y,z) = \ln(16-x^2-y^2-z^2)$

⑤ $f(x,y) = \ln(x \cdot y)$

⑥ $f(x,y) = \ln x + \ln y$

الحل:

① $u = \sqrt{9-x^2-y^2}$; $9-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 9$

أي أن مجموعة تعريفه هي مجموعة النقط الواقعة ضمن الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3 في $\mathbb{R}^2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مجموعة التعريف:

② $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

③ $-1 \leq x+y+z \leq 1$

مجموعة تعريفه الجزء من الفراغ الواقع بين المستويين في $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

④ $16-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 16$

مجموعة تعريفه هي النقط الواقعة داخل الكرة التي مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 4 في $\mathbb{R}^3$

⑤ $x \cdot y \geq 0$

أي مجموعة التعريف النقط الواقعة في الربع الأول والثالث ماعدا المحاور الإحداثية في $\mathbb{R}^2$ (oX, oY)

⑥ $x \geq 0$ & $y \geq 0$

أي مجموعة تعريفه في $\mathbb{R}^2$ هي النقط الواقعة في الربع الأول ماعدا المحاور الاحداثية (oX, oY)

السؤال السادس:

$$U^{(m)} = \left(\frac{2m+1}{3m+5}, \frac{2}{m^2}, \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \frac{\sin 2m}{2m} \right)$$

ادرس تقارب المتالية في $\mathbb{R}^4$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: المتتالية $U^{(m)}$ متقاربة من النقطة: $V_0 = \left(\frac{2}{3}, 0, e, 1\right)$

$$\lim_{m\to\infty} d\left(U^{(m)}, V_0\right) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} d\left(U^{(m)}, V_0\right) = \lim \sqrt{\left(\frac{2m+1}{3m+5} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{m^2} - 0\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e\right)^2 + \left(\frac{\sin 2m}{2m} - 1\right)^2}$$

$$\lim_{m\to\infty} d\left(U^{(m)}, V_0\right) = \sqrt{0+0+0+0} = 0$$

أي أن $U^{(m)}$ متقاربة من النقطة

$$\left(\frac{2}{3}, 0, e, 1\right)$$

السؤال الرابع: أدرس

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2}$$

الحل:

$$(x-y)^2 \geq 0 \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \geq \frac{1}{2xy}$$

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{2}$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإن:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x \cdot y}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2+y^2} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثامن :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ بالشكل :

$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 \cdot y^2 + (x-y)^2}$$

أوجد نهاية الدالة f في النقطة $(0,0)$ عن طريق المتتاليات :

الحل :

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$$

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1 \qquad n \to \infty$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} - \frac{4}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{4n^2+1}{n^4}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$1 \neq 0$ الدالة ليس لها نهاية .

ملاحظة :

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2+yx+y^2}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة