كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الدالة المتناهية في الصفر:

نسمي الدالة $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ والمعرفة بالشكل $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ دالة متناهية في الصفر في المقطة $x = x^0$ أو عندما $x \to x^0$ إذا كانت $\lim_{x \to x^0} f(x) = 0$

حيث $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$

مثال: دالة $u = f(x,y,z) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$ متناهية في الصفر في المقطة $(x^0, y^0, z^0) = (4, 5, 1)$

برهان:

$$\lim_{(x,y,z) \to (4,5,1)} f(x,y,z) = \lim \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2} = 0$$

$\begin{bmatrix} x \to 4 \\ y \to 5 \\ z \to 1 \end{bmatrix}$

أيضاً: $f(x) = \sin x$ في المقطة $x = 0$ هي دالة متناهية في الصفر.

مثال: اثبت أن $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

أثبت أن الدالة $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ليس لها نهاية.

* إن الدالة $f(x) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ دالة تابعة لمتحولين هما x, y وهي معرفة على جميع نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ ما عدا

النقطة (x,y) والتي يكون من أجلها $x^2+y^2=0$ أي:

$$E_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ (x,y)\neq(0,0)\}$$

★ لإيجاد نهاية التابع $f(x,y)$ في النقطة $(0,0)$ يوجد عدة طرق منها الطريقتان التاليتان:

① عن طريق المتتاليات: من أجل ذلك نأخذ المتتاليتين الآتيتين:

$$(x,y)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\longrightarrow(0,0)\quad n\to\infty$$

ولكن:

$$f(x,y)=f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}\longrightarrow 1\quad n\to\infty$$

$$f(x'^{(n)},y'^{(n)})=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}}=\frac{2n}{n^2+1}\longrightarrow 0\quad n\to\infty$$

وبالتالي التابع $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ ليس لها نهاية موجودة في $(0,0)$ أي:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ غير موجودة

② طريقة الطريق الأول: إن نهاية التابع إذا كانت موجودة لا تتعلق بالطريق الذي تؤول هذه التابع من أجله نأخذ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ باتجاه المستقيم $y=x$ عندئذٍ نجد أن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=y}} \frac{2x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=y}} \frac{2x^2}{2x^2} \longrightarrow 1$$

لنسر بها باتجاه $y=-x$ عندئذٍ نجد أنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x}} \frac{-2x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x}} \frac{-2x^2}{2x^2} \longrightarrow -1$$

نلاحظ أنّه في كلٍّ من النهايتين فإنّ النهاية تتعلق بالطريق (السلوك) الذي تسلكه الدالة f) إذا في كلّ مرة نعرف فيها طريق سلوك فإنّ النهاية لهذه الدالة في النقطة $(0,0)$ تكون مختلفة عن الأخرى، وبالتالي النهاية غير موجودة.

مثال: أثبت أنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$$

ط ①: لدينا: $d(f(x,y),0) \to 0$ عندما $(x,y)\to(0,0)$

ولنبرهن أنّ: $|f(x,y)-0| \longrightarrow 0$ عندما $\begin{pmatrix} x\to 0\\ y\to 0\end{pmatrix}$

لدينا:

$$0 < |f(x,y)-0| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| = |x+y|\,|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|$$
$$\leq (|x|+|y|)\,|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نأخذ النهاية من أطراف المتراجحة السابقة: عندما $(x,y)\to(0,0)$

نجد أنّ:

$$0 < |\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - 0| \leq 0$$

لأنّ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|)\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| = 0$$

$|x|+|y| \to 0$ ، $\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|$ مقتالية محدودة

ط (2): باستخدام الجوار: أي سنتحقق الشرط الآتي:

$$\star\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0;\ d(M,M^0)<\delta \Rightarrow d(f(m),a)<\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow d(f(x,y),0)<\varepsilon$$

لنبدأ من أجل $\varepsilon>0$ اختياري:

$$d(f(x,y),0)<\varepsilon \iff |f(x,y)-0|<\varepsilon \iff$$

$$|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}|<\varepsilon \iff |x+y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|$$

$$\leq (|x|+|y|)\left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x|+|y| \leq$$

$$2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \leq 2d((x,y),(0,0)) < \varepsilon$$

ومنه:

$$d((x,y),(0,0)) < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$$

نجد أنّه عندما:

$$d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y),0) < \varepsilon$$

أي أنّ الشرط $\star$ تحقق و $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ط ③ باستخدام المتتاليات :

من أجل ذلك لنأخذ المتتاليتين :

$$(x^{(n)}, y^{(n)}) = \left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

والمتتالية :

$$(x'^{(n)}, y'^{(n)}) = \left(\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

ولكن :

$$f(x^{(n)}, y^{(n)}) = \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) \sin\frac{n}{\pi} \sin\frac{n}{\pi} = \frac{2\pi}{n} \sin^2\frac{n}{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\frac{2\pi}{n}$ ← لامتناهية في الصغر ؛ $\sin^2\frac{n}{\pi}$ ← متتالية محدودة

$$f(x'^{(n)}, y'^{(n)}) = \left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}\right) \sin\frac{4n}{\pi} \sin\frac{4n}{\pi} = \frac{\pi}{2n} \sin^2\frac{4n}{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\frac{\pi}{2n}$ ← لامتناهية في الصغر ؛ $\sin^2\frac{4n}{\pi}$ ← متتالية محدودة

وبالتالي نجد أن الشرط التالي محقق :

$$\forall (u^{(n)})_{n\geq 1} = (x^{(n)}, y^{(n)})_{n\geq 1} \text{ و } u^n = (x^{(n)}, y^{(n)}) \in \mathbb{R}^2$$

و $n = \overline{1,n}$

لدينا $(x^{(n)}, y^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \Rightarrow f(x^{(n)}, y^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

إذاً $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الاستمرار والاستمرار المنتظم:

تعريف الاستمرار المنتظم لدالة تابعة لعدة متحولات في نقطة ما:

لتكن $u=f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ حيث $f: E\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

دالة حقيقية تابعة لعدة متحولات، ولتكن: $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in E$

محواة في $\mathbb{R}^n$

نقول عن الدالة f إنها مستمرة في النقطة $x=x^0$ إذا كانت

$x^0\in E$ وكانت: $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$

أي نهاية هذه الدالة في النقطة $x=x^0$ موجودة وتساوي

إلى قيمة هذه الدالة في النقطة $x=x^0$ أي: $u=f(x)$

دالة مستمرة في النقطة $x=x^0$ إذا وفقط إذا كانت:

$x^0\in E$ ؛ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x^0)$

وإذا لم يتحقق ذلك قلنا أنّ الدالة f غير مستمرة في النقطة

$x=x^0$ وعندها ندعو x^0 نقطة انقطاع لها ونقول عن الدالة f

إنها مستمرة على مجموعة تعريفها E إذا كانت f مستمرة في

كل نقطة من نقط المجموعة E.

× بناءً على التعريف السابق يمكن صياغة شرط استمرار

دالة في النقطة x^0 بالاعتماد على مفهوم الجوار وعلى مفهوم

المتتاليات:

f مستمرة في نقطة $x=x^0$ $\iff$ $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$

$\iff$ باستخدام مفهوم الجوار:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 ; \forall x\in E , d(x,x^0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x^0))<\varepsilon$ صار $\forall$

$\Leftrightarrow$ f مستمرة في النقطة $x=x^0$

$\Leftarrow$ باستخدام مفهوم المتتاليات:

$\forall (x^k)_{k\geq 1} ; x^k\in\mathbb{R}^n ; k=1,2,\dots$ & $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^0$

$\Rightarrow f(x^{(k)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x^0)$

$\Leftrightarrow$ f مستمرة في النقطة $x=x^0$

* يمكن كتابة شرط الاستمرار باستخدام مفهوم الجوار بالشكل:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 ; \forall x\in E$ & $\|x-x^0\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$

الآن إذا رمزنا للتزايد (التغير) الكلي للدالة $u=f(x)$ في النقطة $x=x^0$ بالرمز Δu أو Δf حيث:

$\Delta u=\Delta f=f(x^0+\Delta x)-f(x^0)$

$\Delta u=f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, \dots, x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

$\Delta u=f(x_1^0+(x_1-x_1^0), x_2^2+(x_2-x_2^0) \dots +x_n^0+(x_n-x_n^0))-f(x_1^0,\dots,x_n^0)$

$\Delta u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

$\Delta u=f(x)-f(x^0)$

حيث: $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$

$x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ & $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$

$\Delta x=x-x^0=(x_1-x_1^0, x_2-x_2^0,\dots,x_n-x_n^0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذٍ بالاعتماد على شرط التزايد الكلي لدالة f نكتب شرط الاستمرار بالشكل:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ \forall x\in E \ \&\ \|\Delta x\|<\delta \Rightarrow |\Delta x|<\varepsilon$$

ملاحظة: f مستمر في النقطة $x=x^0$

$$\lim_{x\to x^0} f(x)-f(x^0)=0 \iff \lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$$

$$\iff \lim_{x\to x^0}(\Delta u)=0$$

التغير الجزئي لدالة تابعة لعدة متحولات بالنسبة لمتغيراتها:

على سبيل المثال إذا كانت $u=f(x,y,z)$ دالة تابعة لعدة متحولات هي (x,y,z) عندئذٍ نرمز للتغير الكلي أو التزايد الكلي لدالة u الذي $(x,y,z)=(x^0,y^0,z^0)$ بالرمز Δu ونرمز للتغير الجزئي لدالة f بالنسبة للمتحول x بـ $\Delta_x f$ أو $\Delta_x u$ ويكون:

$$\Delta_x f = f(x^0+\Delta x, y^0, z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$
$$=f(x^0+(x-x^0), y^0, z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$
$$=f(x,y^0,z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$

كذلك فإن:

$$\Delta_y f = f(x^0, y^0+\Delta y, z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$
$$=f(x^0,y^0+(y-y^0),z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$
$$=f(x^0,y,z^0)-f(x^0,y^0,z^0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وكذلك:

$$\Delta_z f = f(x^\circ, y^\circ, z^\circ + \Delta z) - f(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$$
$$= f(x^\circ, y^\circ, z^\circ + (z - z^\circ)) - f(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$$
$$= f(x^\circ, y^\circ, z) - f(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$$

وإذا كانت الدالة:

$$u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad ; \quad x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

عندئذٍ: نرمز للتغير الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x_i بـ $\Delta_{x_i} f$

ويكون لدينا:

$$\Delta_{x_i} f = f(x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_i^\circ, x_{i+1}^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

$$\Delta_{x_i} f = f(x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_i, x_{i+1}^\circ, \dots, x_n^\circ) - f(x_1^\circ, \dots, x_{i-1}^\circ, x_i^\circ, x_{i+1}^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

ونتعامل في $\Delta_{x_i} f$ كدالة تابعة لمتحول واحد هو x_i

مثال: ادرس استمرار التابع (الدالة)

$$u = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ; \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

في النقطة $(0,0)$

الحل: الدالة $u = f(x,y)$ تابعة لمتحولين x, y معرفة في جميع نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$

f مستمرة في $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ولكن نلاحظ من تعريف سابق أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

غير موجودة في النقطة $(0,0)$ إذاً:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \neq f(0,0)$$

$\Leftarrow$ إذا الدالة غير مستمرة عند نقطة

$$(x^0, y^0) = (0,0)$$

وكذلك: أدرس نوعية تعريف الدالة:

$$u = f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z