كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$$

الحل: ط.ذ.

$$|A-\lambda I_3|=\begin{bmatrix}2-\lambda&2&1\\1&3-\lambda&1\\1&2&2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{-L_2+L_3}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\1&3-\lambda&1\\0&-1+\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3+L_1}\begin{bmatrix}2-\lambda&3&1\\1&4-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{bmatrix}=-(1-\lambda)\left((2-\lambda)(4-\lambda)-3\right)=0$$

$$=(1-\lambda)(8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2-3)$$

$$=(1-\lambda)(5-6\lambda+\lambda^2)=(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1=1$ جذر مضاعف

$\lambda_2=5$

ط.ذ: نطبق قانون المعادلة المميزة ضرب أعمدة

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

$\lambda=1$ جذر المعادلة:

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 6\lambda + 5 \\ \hline -6\lambda^2 + 11\lambda - 5 & \\ -6\lambda^2 + 6\lambda & \\ \hline 5\lambda - 5 & \\ 5\lambda - 5 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$

إما $\lambda = 1$ أو $\lambda = 1$ أو $\lambda = 5$.

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

نفرض أن: $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$

$$x_1 = -2x_2 - x_3$$

$$\boxed{x_1 = -2\alpha - \beta} \Longrightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

E_{λ_1} أساس

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

من أجل $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-l_1 + l_3]{3l_1 + l_2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$-4x_2 + 4x_3 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$-4x_2 = -4x_3 \longrightarrow \boxed{x_2 = x_3} \quad *$$

نفرض $x_3 = x \Leftarrow x_2 = x \Leftarrow x_1 - 2x + x = 0$

$$\boxed{x_1 = x} \longrightarrow E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

أساس E_{λ_2} $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

مبرهنة: إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكان λ قيمة ذاتية لـ A مكررة m مرة فإن $\dim E_\lambda \leq m$.

تعريف: نقول عن مصفوفة A أنها تشابه المصفوفة B إذا وجدت مصفوفة غير شاذة X بحيث يكون $X^{-1} \cdot B \cdot X = A$

ملاحظة: إذا كانت A تشابه B، أي إذا كانت $A = X^{-1} \cdot B \cdot X$

فإن: $B = (X^{-1})^{-1} \cdot A \cdot X^{-1}$

بالتالي B تشابه A

مبرهنة: المصفوفات المتشابهة تملك نفس كثير الحدود المميز

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان: لنفرض أنّ المصفوفة A تشابه المصفوفة B،
إذاً بالإمكان إيجاد مصفوفة غير شاذة X بحيث أنّ

$$A = X^{-1} \cdot B \cdot X$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = |X \cdot BX - \lambda I|$$

$$= |X^{-1} B X - \lambda \cdot X^{-1} X|$$

$$= |X^{-1} (B - \lambda I) \cdot X|$$

$$= |X^{-1}| \cdot |B - \lambda I| \cdot |X|$$

$$= |X^{-1}| \cdot |X| \cdot |B - \lambda I|$$

$$= |X|^{-1} |X| \cdot |B - \lambda I| = |B - \lambda I|$$

وبالتالي لـ A و B نفس كثير الحدود المميّز.

تعريف: لتكن

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

كثير حدود ما فوق حقلي F، ولتكن A مصفوفة مربّعة فوق الحقل F نسمّي

$$a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

وهي قيمة كثير الحدود $f(x)$ من أجل $x = A$ ونرمز لها بـ $f(A)$

مبرهنة كيلي هاملتون:

كل مصفوفة جذر لكثير حدودها المميّز.

إيجاد معكوس مصفوفة غير شاذة باستخدام نظرية كيلي هاملتون

مثال: حقق نظرية كيلي هاملتون للمصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

الحل: نجد كثير الحدود المميز

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right]=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1-4)$$

$$=-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3.$$

ومن نظرية كيلي هاملتون نجد:

$$-A^3+3A^2+A-3I=0.$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-A^2+3A+I=3A^{-1}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\left(-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: ليكن $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

شعاع حقيقي عمودي نقول أنه X ناظمي.

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$

نتيجة: كل شعاع عمود حقيقي غير ناظمي يمكن أن نحوله على شعاع عمود حقيقي ناظمي.

فإذا كان $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

شعاع عمود حقيقي غير ناظمي، فإننا نحسب نظيمه أو طويلته ونرمز لها بـ $\|X\|$ بالعلاقة:

$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

ثم نضرب X بمقلوب النظيم فنحصل على شعاع Y يكون ناظمي.

مثال: إذا كان لدينا الشعاع $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ فإن

$\|X\| = 1 + 4 + 0 = 5 + 1$

بالتالي X ليس ناظمي.

$\|X\| = \sqrt{5}$

$Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: نقول عن شعاعي العمود الحقيقيين

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

المتعامدان اسمهما أنهما متعامدان ونرمز لذلك بـ $X \perp Y$ إذا كان

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = 0$$

ملاحظة: إذا كان $X \perp Y$ فإن $Y \perp X$.

مثال: هل الشعاعان التاليان متعامدان:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{4} - \frac{6}{14} + \frac{3}{14} = \frac{1}{14} \neq 0$$

X, Y غير متعامدان

القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمؤثر خطي:

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي و T مؤثراً خطياً نسمي $\lambda \in \mathbb{R}$ قيمة ذاتية للمؤثر الخطي T إذا وجد $X \in V$ حيث $X \neq 0$ بحيث $T(X) = \lambda X$، وفي هذه الحالة نسمي X شعاعاً ذاتياً لـ T موافقاً للقيمة الذاتية λ، ونسمي مجموعة كل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

القيم الذاتية لمؤثر خطي:

ملاحظة: إن مجموعة كل الأشعة الذاتية لمؤثر خطي f بما فيها الشعاع الصفري والموافقة للقيمة الذاتية λ تشكل فضاء شعاعي يرمز له بـ E_λ أي أن:

$$E_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$$

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف على $\mathbb{R}^2$ وفق القاعدة:

$$f(x,y) = (x+2y, 3x+y)$$

الحل: لنفرض أن λ قيمة ذاتية لـ f، وهذا يعني يوجد شعاع $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ يحقق العلاقة

$$f(a,b) = \lambda(a,b)$$

$$a+2b = \lambda a \longrightarrow (1-\lambda)a + 2b = 0$$

$$3a+2b = \lambda b \qquad (2-\lambda)b + 3a = 0$$

وهذا يعني أن (a,b) هو حلة مختلفة عن الصفر لجملة المعادلتين، وبالتالي فإن:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

إما $\lambda = 4$ أو $\lambda = -1$

من أجل $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z