كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

النقط الحادة في حالة $\vec{\chi} = \vec{\chi}(t_0)$

تكون النقطة حادة عندما تحقق $\vec{\chi}' = 0$

نوعها: عندما نجد $\vec{\chi}'' \wedge \vec{\chi}^{(s)} \neq 0$ حيث s رتبة الاشتقاق الأصغر التي تجعل الجداء غير معدوم.

لتميز الحالات:

نقطة تراجع نوع أول عندما s فردي ونقطة تراجع نوع ثاني عندما s زوجي.

إذا كان $\vec{\chi}'' = 0$ نبحث عن الجداء $\vec{\chi}^{(n)} \wedge \vec{\chi}^{(s)} \neq 0$ حيث $s > n$

لتميز الحالات:

s, n فرديان أو زوجيان تراجع نوع ثاني.

s, n مختلفان تراجع نوع أول.

مثال:

$$\vec{\chi}(t) = t^2\vec{e_1} + t^3\vec{e_2}$$

أوجد النقط الحادة.

الحل:

$$\vec{\chi}'(t) = 2t\vec{e_1} + 3t^2\vec{e_2}$$

$$\vec{\chi}' = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 3t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{\gamma}''(0) = 2\vec{P}_1 + 0 = 2\vec{P}_1$

$\vec{\gamma}''' = 6\vec{P}_2$

$\vec{\gamma}''(0) \wedge \vec{\gamma}'''(0) = 2\vec{P}_1 \wedge 6\vec{P}_2 = 12\vec{P}_3 \neq 0$

$\Leftarrow S = 3$ تراجو نوع أول.

مثال: مسار جسيم متحرك بالشكل الوسيطي $\gamma_1 = t^2$ و $\gamma_2 = t(t^2-1)$

أوجد النقط المضاعفة

$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$

نقطة المضاعفة هي نفس النقطة في قيمتين مختلفتين

$$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \quad \cdots (1) \\ t_1(t_1^2-1) = t_2(t_2^2-1) \quad \cdots (2) \end{cases}$$

من 1 $t_1 = t_2$ أو $t_1 = -t_2$

ونفرض ((المجاهيل بقيم مختلفة))

نعوض في 2 $t_1 = -t_2$

$-t_2(-t_2^2-1) = t_2(t_2^2-1)$

$-t_2^3 + t_2 = t_2^3 - t_2$

$-2t_2^3 + 2t_2 = 2t_2(t_2^2-1) = 0$

$t_2 = 0 \Leftarrow t_1 = 0$ مرفوضة

أو $t_2 = 1 \Leftarrow t_1 = -1 \Leftarrow (1,0)$

أو $t_2 = -1 \Leftarrow t_1 = 1 \Leftarrow (1,0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دساتير فرينيه:

بفرض $\vec{x} = \vec{x}_s$ تمثيله نظامي لـ c $\Leftarrow$ $\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right| = 1$

وسنفرض الاشتقاق بالنسبة للفاصلة المنحنية

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}^{\cdot}$$

أما باقي الرطاي

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}'$$

مماس واحدة المماس: رمزه t يعطى بالعلاقة:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}^{\cdot}$$

بينما من أجل $\vec{x} = \vec{x}(t)$ يعطى بالعلاقة

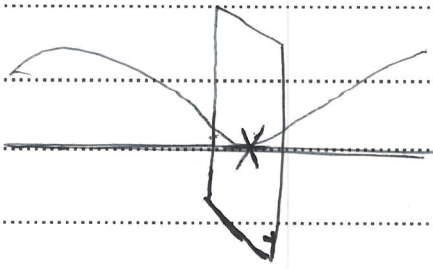
$$\vec{T} = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}$$

المستقيم المماس والمستوي الناظم:

من أجل $\vec{x} = \vec{x}(t)$

في نقطة $\vec{x}_0$ نجد معادلة

المستقيم المماس بالشكل



$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \ell\vec{T}$$

أو

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \ell\vec{x}^{\cdot}$$

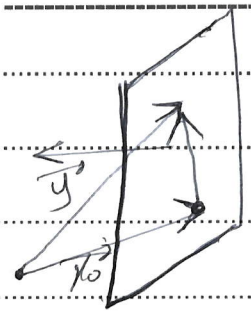
أو

$$y = \vec{x}_0 + \ell\vec{x}'$$

أما المستوي الناظم في النقطة $\vec{x}_0$ $(\vec{y} - \vec{x}_0)$

$$(\vec{y} - \vec{x}_0) \cdot \vec{T} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



مثال: أوجد معادلة المماس $\vec{x} = T\vec{p_1} + T^2\vec{p_2} + T^3\vec{p_3}$ عند $T=1$

ثم أوجد المستقيم المماس والمستوي الناظم عند $T=1$

الحل:

$$\vec{x'} = \vec{p_1} + 2T\vec{p_2} + 3T^2\vec{p_3}$$

$$|\vec{x'}| = \sqrt{1+4T^2+9T^4}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{x'}}{|\vec{x'}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4T^2+9T^4}}\left[\vec{p_1} + 2T\vec{p_2} + 3T\vec{p_3}\right].$$

معادلة المستقيم المماس عند $T=1$:

نضع $\vec{x}(1) = (1,1,1) = p_1 + p_2 + p_3$

$$\vec{x'}(1,2,3) = \vec{p_1} + 2\vec{p_2} + 3\vec{p_3}$$

$$\vec{y} = \vec{x}(1) + t\,\vec{x'}(1) \longrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

المستوي الناظم: هو ناظمة $\vec{x_1}(1,1,1)$ ناظمة $\vec{n}(1,2,3)$.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow (\vec{y} - \vec{x}(1)) \cdot \vec{x'}(1) = 0$$

$$= [\,x-1,\ y-1,\ z-1\,] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x-1+2(y-1)+3(z-1)=0$

$x-1+2y-2+3z-3=6$

$x+2y+3z-6=0$

شعاع التقوس: يعطى شعاع التقوس بالعلاقة:

$$\vec{K}=\vec{K}(s)=\frac{d\vec{T}}{ds}=\vec{\chi}$$

هو شعاع يماس $\vec{T}$ لأن طويلة $\vec{T}$ ثابتة هذا يتجه نحو داخل المنحني ((إلى داخل التقعر)).

إن طويلة $\vec{K}$ هذه بالرمز $K=|\vec{K}|$ هي تقوس المنحني تمثل مقدار يعبر عن بعد القوس c عن المستقيم المماس.

شعاع واحدة الناظم:

$$\vec{N}=\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}=\frac{\vec{\chi}}{|\vec{\chi}|}$$

وهو الناظم الأساسي ودائماً الفراغ يتجه $\vec{N}$ إلى داخل التقعر مع اتجاه $\vec{K}$ ويكون التقوس $\vec{K}=K.\vec{N}$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة