



المحاضرة السابعة (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ دراسة التكامل من النمط $I = \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$
- ❖ العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.

**دراسة التكامل من النمط $I = \int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ حيث f تابع كسري
 $a \neq 0$ ومميز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ غير صفري**

فكرة حلّ هذا التكامل هو استخدام تعويض يؤدي إلى تكامل لدالة كسرية

يُحلّ هذا التكامل باستخدام تعويضات (تحويلات) أولر وهي على الشكل التالي:

تعويض أولر الأول: إذا كان $a > 0$ عندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a} \text{ or } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$$

نربع الطرفين نحسب x ثم dx والجذر بدلالة t ، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

تعويض أولر الثاني: إذا كان $c > 0$ عندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \text{ or } \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}$$

نربع الطرفين نحسب x ثم dx والجذر بدلالة t ، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

تعويض أولر الثالث: إذا كان $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإنّ ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ جذران حقيقيان مختلفان هما α و β ($\alpha \neq \beta$) وعندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$$

أو

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \beta)$$

نربع الطرفين ثم نحسب x و dx والجذر بدلالة t ، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

ملاحظة: إذا كان $a < 0$ و $c < 0$ فلا يمكن استخدام تعويض أولر الأول والثاني بل نستخدم تعويض أولر الثالث

ضمن الشرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

ملاحظة: إذا كان $a < 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فتكون هذه الحالة مستثناة لأن المقدار تحت الجذر يجب أن يكون موجباً

ملاحظة: في بعض التمارين قد يكون استخدام أكثر من تعويض فنحصل على أجوبه متكافئة.

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

الحلّ: الطريقة الأولى: باستخدام تعويض أولر الأول: $a = 1 > 0$

نجري التحويل $\sqrt{x^2 + x + 1} = t + x\sqrt{a} = t + x$

نربع الطرفين نجد $x^2 + x + 1 = (t + x)^2$ عندئذٍ

$$x^2 + x + 1 = t^2 + x^2 + 2tx \Rightarrow x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}$$

عندئذٍ $dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2} dt$ نعوض نجد:

$$I = \int \frac{-2}{2t - 1} dt = -\ln|2t - 1| + c = -\ln|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c$$

طريقه ثانيه للحلّ: باستخدام تعويض أولر الثاني: $c = 1 > 0$ ، نضع

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = tx + \sqrt{c} = tx + 1$$

نربع الطرفين نجد: $x^2 + x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1$ بالتالي $x + 1 = t^2x + 2t$ عندئذٍ

$$x = \frac{1 - 2t}{t^2 - 1}$$

بالتالي

$$dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t^2 - 1)^2} dt$$

نعوض نجد

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \frac{dt}{1 - t^2} = 2 \times \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c_1 = \ln \left| \frac{1 + \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1)}{x}}{1 - \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1)}{x}} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + c_1 = \ln \left| \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{(x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1})(x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1})}{(x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2 + x + 1}{x} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{2x^2 + x + 2x\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + c_1 = \ln |2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + c_1 \\ &= -\ln \left| \frac{1}{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} \right| + c_1 = -\ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1}{3} \right| + c_1 \\ &= -\ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + \ln 3 + c_1 = -\ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c \end{aligned}$$

الطريقة الثالثة: بالانتماء إلى مربع كامل:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

نضع $x + \frac{1}{2} = u$ بالتالي $dx = du$ نجد

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right| + c_1 = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{2} \right| + c_1 = \ln |2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + c_2 \\ &= \ln \left| \frac{(2\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - (2x + 1)^2}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - (2x + 1)} \right| + c_2 \\ &= \ln \left| \frac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1} \right| + c_2 \\ &= \ln 3 - \ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c_2 \\ &= -\ln |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c \end{aligned}$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$$

الحل: باستخدام تعويض أولر الثالث: ثلاثي الحدود $-x^2 + 3x - 2$ يملك جذران حقيقيان مختلفان $\alpha = 1, \beta = 2$ نفرض $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = t(x - \alpha) = t(x - 1)$ نربع الطرفين نجد $-(x - 2)(x - 1) = t^2(x - 1)^2$ عندئذ $(2 - x) = t^2(x - 1)$

بالتالي

$$x = \frac{2 + t^2}{1 + t^2}$$

عندئذ $dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$ نعوض نجد:

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = t(x - 1) = \frac{t}{1 + t^2}$$

بالتالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = -2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = -2 \arctan(t) + c = -2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right) + c$$

دراسة بعض الحالات الخاصة:

1.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c \text{ or } -\frac{1}{b} \arccos\left(\frac{bx}{a}\right) + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

2.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

3.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

4. لدراسة التكامل حيث $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ يمكننا أن نفرض

$$t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' = \frac{1}{2} \times (2ax + b)$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

الحل: نضع $t = \frac{1}{2} \times (2ax + b) = \frac{1}{2} \times (2x + 1)$ بالتالي $x = t - \frac{1}{2}$ عندئذ $dx = dt$ بالتالي

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\right) + c \\ &= \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + c \end{aligned}$$

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

الحل: نضع

$$t = \frac{1}{2} \times (2x - 1) = x - \frac{1}{2}$$

بالتالي $x = t + \frac{1}{2}$ عندئذ $dx = dt$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{9}{4}}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{9}{4}} \right| + c = \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right| + c$$

طريقه ثانيه: باستخدام تعويض أولر الأول: $a = 1 > 0$ ، عندئذ نفرض

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = t + x$$

بالتالي $x = \frac{-2-t^2}{2t+1}$ عندئذ $dx = \frac{-2t^2-2t+4}{(2t+1)^2} dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = - \int \frac{2}{2t+1} dt = -\ln|2t+1| + c_1 \\ &= -\ln \left| 2 \left(\sqrt{x^2 - x - 2} - x \right) + 1 \right| + c_1 \\ &= -\ln \left| -2x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{1}{-2x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2}} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{2\sqrt{x^2 - x - 2} - (-2x + 1)}{(2\sqrt{x^2 - x - 2})^2 - (-2x + 1)^2} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2}}{-9} \right| + c_1 = \ln \left| \frac{2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 2}}{9} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| \frac{2}{9} \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right) \right| + c_1 \\ &= \ln \left(\frac{2}{9} \right) + \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right| + c_1 \\ &= \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right| + c \end{aligned}$$

5. دراسة التكامل من النمط $I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ ، يمكننا أن نفرض

$$t = \frac{1}{2} (ax^2 + bx + c)' = \frac{1}{2} \times (2ax + b)$$

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

الحل: نضع $t = \frac{1}{2} \times (8x + 4) = 4x + 2$

بالتالي $x = \frac{t-2}{4}$ عندئذ $dt = 4dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{8} \int \frac{t+10}{\sqrt{t^2+8}} = \frac{1}{8} \int \frac{t}{\sqrt{t^2+8}} dt + \frac{10}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+8}} \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{t^2+8} + \frac{5}{4} \ln(t + \sqrt{t^2+8}) + c_1 \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \ln(2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+3}) + c \end{aligned}$$