كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المادة: تحليل رياضي 2 القسم: رياضيات

المحاضرة: السابعة نظري السنة: الأولى

دراسة التكامل من النمط:

$$I=\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

حيث ax^2+bx+c ثلاثي الحدود $a\neq 0$ مميزه Δ غير معدوم

* فكرة حل هذا التكامل هو استخدام تعويض يؤدي إلى تكامل الدالة الكسرية

* يحل هذا التكامل باستخدام تعويضات (تحويلات) أويلر وهي على الشكل التالي:

① تعويض أويلر الأول

إذا كان $a>0$ عندئذ نفرض $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$ أو $t-x\sqrt{a}$

نربع الطرفين ونحسب x ثم dx بدلالة t ونعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

② تعويض أويلر الثاني: إذا كان $c>0$ عندئذ نفرض

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c} \text{ أو } tx-\sqrt{c}$$

③ تعويض أويلر الثالث: إذا كان $\Delta=b^2-4ac>0$ فإن ثلاثي الحدود ax^2+bx+c يمكن تحليله إلى جداء عاملين مختلفين هما $x-\alpha$ و $x-\beta$ نفرض

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha) \text{ أو } t(x-\beta)$$

الملاحظة: إذا كان $a\neq 0$ و $c<0$ عندئذ لا يمكن تطبيق تعويض أويلر الأول والثاني بل نستخدم تعويض أويلر الثالث بشرط $\Delta>0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الملاحظة 2: إذا كان $a<0$ و $\Delta = b^2-4ac<0$ فتكون هذه الحالة مستثناة لأنه المقدار تحت الجذر يجب أن يكون موجب

الملاحظة 3: في بعض التمارين قد يكون استخدام أكثر من تعويض فنوضح على أحد بتكافئ

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

الحل: $a=1$ ⟸ $a>0$

نفرض $\sqrt{x^2+x+1} = t + x\sqrt{a}$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t+x$$

نربع الطرفين ⟸ $x^2+x+1 = t^2+2tx+x^2$

$$x-2tx = t^2-1$$

$$x(1-2t) = t^2-1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}$$

$$dx = \frac{2t(-1+2t)-2(t^2-1)}{(2t-1)^2}$$

$$= \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t+x = t+\frac{1-t^2}{2t-1}$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-t+1}{2t-1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \int \left(\frac{2T-1}{T^2-T+1}\right) X \left(\frac{-2T^2+2T-2}{(2T-1)^2}\right) dT$$

$$= \int \frac{-2}{2T-1} = -\ln|2T-1| + C = -\ln|\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1| + C$$

طريقة الحل: باستخدام تعويض أويلر الثاني

نفرض

$$\sqrt{x^2+x+1} = Tx + \sqrt{C} = Tx + 1$$

$$x^2+x+1 = T^2x^2 + 2Tx$$

$$x+1 = T^2x + 2T \Rightarrow x = \frac{1-2T}{T^2-1}$$

$$dx = \frac{2T^2-2T+2}{(T^2-1)^2} dT$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = T\left(\frac{1-2T}{T^2-1}\right) + 1 = \frac{-T^2+T-1}{T^2-1}$$

نعوض في I نجد:

$$I = \int \frac{-2}{T^2-1} dT = 2\int \frac{dT}{1-t^2} = 2 \times \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+T}{1-T}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+T}{1-T}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \Big/ \frac{1-(\sqrt{x^2+x+1}-1)}{x}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \ln\left|\frac{(x-1)+\sqrt{x^2+x+1}\,)\,(x+1+\sqrt{x^2+x+1}\,)}{(x+1)^2-(x^2+x+1)}\right| = -\ln\left|\frac{x^2-1+2x\sqrt{x^2+x+1}+x^2+x+1}{x}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{2x^2+x+2x\sqrt{x^2+x+1}}{2}\right| + C_1 = -\ln\left|2x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C = -\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}{3}\right| + C$$

$$= 4(x^2+x+1)-(2x+1)^2$$

$$= 4x^2+4x+4-(4x^2+4x+1) = -\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + C + \ln(3)$$

$$= -\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + C$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$a = -1 < 0$

$c = -2 < 0$

$\Delta = b^2-4ac = 9-4(-1)(-2) = 9-8 = 1 > 0$

$\alpha = 1, \quad \beta = 2.$

$\sqrt{-x^2+3x-2} = T(x-1)$ نفرض

نربع الطرفين

$$-x^2+3x-2 = T^2(x-1)^2$$

$$-(x-2)(x-1) = T^2(x-1)^2$$

$$2-x = T^2(x-1)$$

$$2-x = T^2x-T^2$$

$$2+T^2 = T^2x+x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$2+t^2=(1+t^2)x \longrightarrow x=\frac{2+t^2}{1+t^2}$

$dx=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$

$\sqrt{-x^2+3x-2}=t(x-1)=t\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}-1\right)=\frac{t}{1+t^2}$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\arctan(t)+C$$

$$=-2\arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2+3x-2}}{x-1}\right)+C$$

دراسة بعض الحالات الخاصة:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C \quad (1)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C \quad (2)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a}\right|+C \quad (3)$$

(4) دراسة التكامل $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

نكتب البسط بدلالة المشتق $T=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)=\frac{1}{2}(2ax+b)$

مثال:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نضع $T = \frac{1}{2}x(2x+1) = x + \frac{1}{2}$.

$dT = dx$

$$I = \int \frac{dT}{\sqrt{T^2 + \frac{3}{4}}} = Ln\left(T + \sqrt{T^2 + \frac{3}{4}}\right) + C$$

$$= Ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| + C$$

مثال: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$

$T = \frac{1}{2}(2x-1) = x - \frac{1}{2}$.

$x = T + \frac{1}{2} \Rightarrow dT = dx$

نعوض فنجد

$$I = \int \frac{dT}{\sqrt{T^2 - \frac{9}{4}}} = Ln\left|T + \sqrt{T^2 - \frac{9}{4}}\right| + C$$

$$= Ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2}\right| + C$$

(5) لباقة التكامل من النمط: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

نفرض $T = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'$

$= \frac{1}{2}(2ax+b)$.

مثال:

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

نضع $T = \frac{1}{2}(2x-4) \Leftarrow T = \frac{1}{2}(x^2-4x+3)'$

$T = x - 2$.

$x = T + 2 \Rightarrow dx = dT$.

نعوض فنجد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \int \frac{2t+5}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$I = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$= \frac{(t^2-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 5\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{t^2-1} + 5\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C$$

ثم نضع مكان كل t نضعه على التكامل النظيف $x-1$.

مثال:

$$I = \int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}$$

الحل:

$$t = \frac{1}{2}(-2-2x)$$

$$t = -x-1 \Rightarrow x = -1-t$$

$$dt = -dx$$

$$6-2x-x^2 = -(x+1)^2+7 = -t^2+7$$

$$\int I = \int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt)$$

$$= \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}} = \frac{t}{\sqrt{7-t^2}}\,dt - 4\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{7-t^2} - 4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C$$

ونضع مكان كل t $-x-1$ نضعه على التكامل النظيف.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة