كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : فيزياء نووية٢

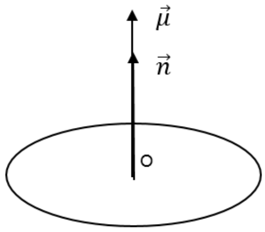
المحاضرة ٣+٤/نظري/د.سمر عمران

المحاضرة الثالثة والرابعة لمقرر الفيزياء النووية 2 – د. سمر عمران

العزم المغناطيسي:

1 - العزم المغناطيسي المداري:

كلاسيكياً: لنعتبر لدينا حالة تيار كهربائي i يمر في حلقة دائرية مساحة سطحها المستوي S . إنَّ العزم المغناطيسي $\vec{\mu}_l$ المرافق لهذا التيار هو عبارة عن شعاع محمول على الناظم $\vec{n}$ على السطح S الموجه كما يبدو في الشكل التالي ويُعطى بالعلاقة التالية:



$$\vec{\mu}_l = \frac{1}{K} iS\vec{n} \qquad (1)$$

حيث: $\vec{n}$ شعاع واحدة الناظم، $S = \pi r^2$ السطح الدائري المحدد بمسار التيار i ، K ثابت يتعلق بالجملة المستخدمة (وفي جملة واحدات غوص Gauss $(K = c)$ حيث c سرعة الضوء).

إذا كان التيار السابق ناتجاً عن جسيم ذات شحنة q وكتلة m ، يرسم مسار دائري نصف قطره r بسرعة v ، يكون لدينا $i = \frac{dq}{dt} = \frac{qv}{2\pi r}$ و $S = \pi r^2$ وبالتعويض في العلاقة (1) وضرب طرفها اليميني بـ 2m وقسمته على 2m نحصل على العلاقة التالية في جملة واحدات غوص:

$$\vec{\mu}_l = \frac{1}{K} iS\vec{n} = \frac{1}{c}\frac{qv}{2\pi r}\frac{\pi r^2\, 2m}{2m}\vec{n} = \frac{q}{2mc}(r.mv)\vec{n} \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow\ \vec{\mu}_l = \frac{q}{2mc}\,\vec{L} \qquad (3)$$

حيث: $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ العزم المداري للجسيم.

تُكتب العلاقة (3) <u>من أجل إلكترون</u> على الشكل التالي: $\vec{\mu}_{le} = \frac{-e}{2m_e c}\,\vec{L}$

<u>من أجل بروتون</u> على الشكل التالي: $\vec{\mu}_{lp} = \frac{+e}{2m_p c}\,\vec{L}$

<u>من أجل نترون</u> على الشكل التالي: $\vec{\mu}_{ln} = 0$

حيث e شحنة الإلكترون، m_e كتلة الإلكترون، m_p شحنة البروتون.

كوانتياً: تُعطى قيمة L وفق قوانين ميكانيك الكم أو الميكانيك الكوانتي بالعلاقة التالية:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

إذا فالقيمة العددية المطلقة للعزم المغناطيسي المداري الناشئ عن هذه الحركة المدارية تساوي:

$$\mu_l = \frac{q}{2mc}\hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad (4)$$

نشير إلى أنَّ مسقط العزم المغناطيسي المداري وفق محور التكميم الذي يظهر نتيجة الحركة المدارية للإلكترون يكون دوماً موازياً للعزم الحركي المداري ومعاكساً له بالإشارة:

$$(\mu_{le})_z = \frac{-e\hbar}{2m_ec}\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{l(l+1)} \qquad (5)$$

حيث μ_B مغناطون بور وهو يتعين بالثوابت $c, m_e, \hbar, \mathrm{e}$ وقيمته العددية تساوي:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_ec} = 0.9273 \times 10^{-20}\, erg/gauss$$

$$\mu_B = 0.5788 \times 10^{-14}\, MeV/gauss$$

2 - **العزم المغناطيسي السبيني**:

يمتلك الإلكترون إضافة للعزم الحركي المداري عزماً حركياً ذاتياً (سبين أو عزم سبيني)، لذلك يجب أن يكون عزم مغناطيسي سبيني يرمز له $\vec{\mu}_{se}$ ناتج عن امتلاك الإلكترون لسبين. وقد وجد من خلال التجربة أنَّ عبارة هذا العزم تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{\mu}_{se} = g_e\left(\frac{-e}{2m_ec}\right)\vec{s} \qquad (6)$$

حيث $g_e = 2$ ثابت الجيرومغناطيسية، كما أنَّ وجود متجة السبين $\vec{s}$ في العلاقة الرياضية تعني أنَّ هناك قيمتان للعزم المغناطيسي السبيني إحداهما موجبة (+) والأخرى سالبة (−).

3 - **العزم المغناطيسي الكلي**:

هذا العزم يساوي مجموع العزمين الناتجين عن الحركة المدارية والسبينية أيّ أنَّ:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$$

4 - **العزم المغناطيسي للنكليونات**:

بالمقارنة مع ما ذكرناه حول العزوم المغناطيسية للالكترون يمكن لنا أن نتسائل حول كيفية حساب العزم المغناطيسي للبروتون والنترون، كما نعلم إنَّ البروتونات والنترونات هما فيرميونات مثل الالكترونات لهما سبين يساوي $\frac{1}{2}$، استناداً إلى ذلك يمكن أن نكتب بالنسبة للبروتون بعد استبدال شحنة الالكترون $(-e)$ بشحنة البروتون $(+e)$ وكتلة الالكترون m_eبكتلة البروتون m_p فنجد أنَّ العزم المغناطيسي السبيني للبروتون يساوي:

$$\vec{\mu}_{sp} = g_p\left(\frac{+e}{2m_pc}\right)\vec{s} \quad ; \; g_p \approx 2 \qquad (7)$$

لكن التجارب التي أجراها كل من ستيرن stern وغيرلاش Gerlach عام 1933 جاءت بنتائج مدهشة، فقد أثبتت هذه التجارب أنَّ:

$$g_p = 5.5855$$

أي أنَّ العزم المغناطيسي المقيس للبروتون يتجاوز القيمة المتوقعة بثلاثة أضعاف تقريباً. أمّا بالنسبة للنترون الذي لا يحمل شحنة كهربائية فإنَّ الأمر أكثر تعقيداً، فقد وجد ألفاريز Alvarez وبلوخ Bloch عام 1940 أنَّ:

$$g_n = -3.82629$$

تدل الإشارة السالبة على أنَّ اتجاه العزم المغناطيسي للنترون يعاكس اتجاه السبين، وبالتالي العزم المغناطيسي لكل من البروتون والنترون هي على الترتيب:

$$\left.\begin{aligned} \mu_p &= \frac{g_p}{2}\mu_N = 2.79275\ \mu_N \\ \mu_n &= \frac{g_n}{2}\mu_N = -1.91345\ \mu_N \\ \mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p c} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

حيث μ_N يسمى المغناطون النووي.

ملاحظة:

1- إنَّ شعاع العزم المغناطيسي يكون موجباً إذا كان يتجه باتجاه العزم الحركي وسالباً إذا كان بعكس اتجاهه.

2- كانت التوقعات النظرية أن يكون $\mu_p = 1$ و $\mu_n = 0$ لأن النترون حيادي الشحنة الكهربائية، لكن النتائج التجريبية أثبتت عدم صحة هذه التوقعات وهذا بدوره فتح الباب أمام إمكانية التنبؤ بعدم نقطية النكليونات (أي أنها جسيمات غير أولية). وبالتالي يمكن طرح السؤال التالي عن الفقرة السابقة (كيف أثبت أنَّ البروتون والنترون ليست جسيمات أولية؟)

5 - **العزم المغناطيسي للنوى**:

يمكن أن نحصل على العزم المغناطيسي الكلي للنكليون إن كان بروتون أو نترون بجمع العزوم المغناطيسية الناتجة عن الحركة المدارية وعن الحركة السبينية الخاصة به، أما العزم المغناطيسي الكلي للنواة والناتج عن جميع النكليونات فيرتبط بعزمها الزاوي الكلي $\vec{J}$ الذي يساوي:

$$\vec{J} = \sum_{\alpha=1}^{A} \vec{l}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{A} \vec{s}_\alpha \qquad (9)$$

وبالتالي فإنَّ العزم المغناطيسي المتعلق بالحركة المدارية للبروتونات والنترونات هو:

$$\vec{\mu}_{lp} = g_{l\alpha}.\mu_N \sum_{\alpha=1}^{Z} \vec{l}_\alpha \qquad (10)$$

$$\vec{\mu}_{ln} = g_{l\alpha}.\mu_N \sum_{\alpha=1}^{A-Z} \vec{l}_\alpha \qquad (11)$$

وهكذا نحصل على العزم المغناطيسي الكلي للنواة:

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu} = \mu_N \sum_{\alpha=1}^{A} \left(g_{l\alpha}\vec{l}_\alpha + g_{s\alpha}\,\vec{s}_\alpha\right) \qquad (12)$$

حيث أنَّ: $g_{l\alpha} = 1$ من أجل البروتونات ، $g_{l\alpha} = 0$ من أجل النترونات.

و $g_{S\alpha} \cong 5.58$ من أجل البروتونات ، $g_{s\alpha} = -3.83$ من أجل النترونات.

ملاحظة: استناداً إلى ما درسناه في ميكانيك الكم يمكن أن نكتب عبارة العزم المغناطيسي μ بدلالة العزم الحركي الكلي J ومسقط العزم المغناطيسي على محور التكميم، أي بدلالة OZ، حيث يتم القياس وفق محور الحقل المغناطيسي:

$$\mu = \mu(J, J) = \langle J, J |\, \vec{\mu}_z \,| J, J\rangle \qquad (13)$$

هذه العبارة وفق مصطلحات ديراك، ولا يمكن تقديرها أو فهمها إلا بواسطة بعض النماذج أو الطرق المستخدمة في فهم البنية النووية لهذا السبب سنكتفي بعرض نموذج أو طريقة شميت.

نموذج (أو طريقة) شميت لحساب μ:

تبيّن التجارب أنَّ العزم الحركي الكلي للنوى ذات العدد الزوجي من البروتونات والنترونات في الوقت نفسه معدوم دوماً مثل ^{4}He , ^{14}C يدل هذا على وجود تفاعلات داخل النواة تفضل تجميع النكليونات في أزواج تؤدي إلى انعدام عزومها. بناءً على هذا الاستنتاج اقترح شميت نموذجاً أو طريقة لإيجاد العزم المغناطيسي للنوى ذات العدد الكتلي الفردي (النوى التي تملك نيكلون مفرد)، وقد اعتبر أنَّ العزم الحركي الكلي للنكليون الفردي الأخير هو الذي يساهم بمفرده في العزم الحركي الكلي للنواة لأن جميع النكليونات الأخرى المتبقية (زوجية – زوجية) تتجمع في أزواج لتعطي عزماً حركياً كلياً يساوي الصفر.

وهكذا فإنَّ العزم المغناطيسي الكلي للنواة يأتي نتيجة مساهمة هذا النكليون الفردي، وعليه فعندما يكون <u>النكليون الفردي</u> بروتوناً ينتج العزم المغناطيسي عن الحركة المدارية للبروتون، وعن عزمه المغناطيسي الذاتي أو السبيني، أمّا إذا <u>النكليون الفردي</u> نتروناً فتأتي المساهمة الوحيدة عن طريق عزمه المغناطيسي الذاتي (السبيني).

إذاً يجب علينا أن نحسب المركبة الأعظمية للعزم المغناطيسي على المحور z والتي رمزنا لها بـ μ وندعوها بالعزم المغناطيسي للنواة.

عرّف شميت عامل الجيرومغناطيسية (النسبة الجيرومغناطيسية) g لحالة نووية ما بالعلاقة التالية:

$$\mu = \langle J,J|\, \vec{\mu}_z \,|J,J\rangle = \mu_N\, g\, \langle J,J|\, \vec{J}_z \,|J,J\rangle = \mu_N\, g\, J \qquad (14)$$

ويصبح هذا مساوياً حسب افتراض شميت إلى:

$$\mu = \langle J,J|\, \mu_N\, g\left(g_l \vec{l}_z + g_s\, \vec{s}_z\right)|J,J\rangle = \mu_N\, g\, j \qquad (15)$$

حيث j العزم الحركي الكلي للنكليون الفردي.

إنَّ طريقة حساب g معروفة جيداً في الفيزياء الذرية ومن أجل ذلك نستخدم (الطريقة الشعاعية أو النموذج الشعاعي) الذي يربط بين العزم الكلي والعزم المداري والعزم السبيني.

النموذج الشعاعي:

نُمثّل في هذا النموذج مؤثرات العزوم الحركية بأشعة. إذا رمزنا بـ $\hat{\sigma}_j$ لمؤثر العزم الحركي الكلي، فإنَّ هذا يرافق شعاع طويلته تساوي إلى: $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ وبما أنَّ: $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ فإنَّ:

$$(\vec{j})^2 = \left(\vec{l} + \vec{s}\right)^2 = \left(\vec{l}\right)^2 + (\vec{s})^2 + 2\vec{l}\,.\vec{s}$$

$$(\vec{s})^2 = \left(\vec{j} - \vec{l}\right)^2 = (\vec{j})^2 + \left(\vec{l}\right)^2 - 2\vec{j}\,.\vec{l}$$

$$\left(\vec{l}\right)^2 = (\vec{j} - \vec{s})^2 = (\vec{j})^2 + (\vec{s})^2 - 2\vec{j}\,.\vec{s}$$

يمكن ملاحظة أنَّ الزاوية بين الشعاعين $\vec{l}$ و$\vec{j}$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\cos\left(\vec{j}\,,\vec{l}\right) = \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2|\vec{j}|\,\left|\vec{l}\right|} \qquad (16)$$

كما أنَّ الزاوية بين الشعاعين $\vec{s}$ و$\vec{j}$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\cos(\vec{j}\,,\vec{s}) = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2|\vec{j}|\,|\vec{s}|} \qquad (17)$$

حيث أنَّ:

$$(\vec{j})^2 = j(j+1)\ ,\ \left(\vec{l}\right)^2 = l(l+1)\ \ ,\ \ (\vec{s})^2 = s(s+1)$$

تُعطى مركبة العزم المغناطيسي الموازية لـ j بالعلاقة التالية:

$$\mu = \mu_l \cos\left(\vec{j}\,,\vec{l}\right) + \mu_s \cos(\vec{j}\,,\vec{s}) \qquad (18)$$

بتعويض العلاقتين (16) و (17) في العلاقة الأخيرة (18) نجد، مع العلم أنَّ: $g = \frac{\mu}{j}$:

$$g = \frac{\mu_l \cos(\vec{j}, \vec{l}) + \mu_s \cos(\vec{j}, \vec{s})}{j}$$
$$= \mu_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2|\vec{j}|^2 \, |\vec{l}|} + \mu_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2|\vec{j}|^2 |\vec{s}|} \qquad (19)$$

وبما أنَّ:

$$(\vec{j})^2 = j(j+1) \ , \ g_l = \frac{\mu_l}{l} \ , \ g_s = \frac{\mu_s}{s}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة (19) نجد أنَّ:

$$g = g_l \frac{j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)} \qquad (20)$$

نلاحظ أنَّ العلاقة (20) تعبر عن ثابت الجيرومغناطيسية وفي حال كان العزم المداري يساوي العزم السبيني نحصل على:

$$g = \frac{1}{2}(g_l + g_s)$$

عزم رباعي الأقطاب الكهربائي:

نعلم أنَّ للبروتون والنترون صفات كهرومغناطيسية وهذا بدوره ينطبق على النواة كون النواة مكونة أساساً من نيكلونات، هذا يعني أنَّ هذه النواة تمتلك عزوماً متعددة الأقطاب الكهربائية والمغناطيسية وعادةً نركز على عزم رباعي الأقطاب الكهربائي لأن هذا النوع من العزم يقدّم لنا معلومات دقيقة حول النواة وبالتالي يمكن اعتباره حجراً أساسياً في فهم نماذج البنية النووية ولفهم هذا الموضوع سندرسه من وجهة نظر كلاسيكية بحتة، ومن أجل ذلك سنعتبر أنَّ لدينا توزع لشحنة كهربائية بكثافة $\rho(r)$ في الحجم V ولنفرض أنَّ هناك نقطة واقعة خارج هذا الحجم $P(x, y, z)$ ولعتبر أنَّ هناك شحنة عنصرية تشغل حجماً عنصرياً ضمن الحجم الكلي محددة بـ متجه الموضع $\vec{r}$.

لنبحث الآن عن عبارة الكمون $U(\vec{R})$ الناتج عن الشحنة في نقطة تقع خارج الحجم المحدّد ولتكن النقطة $P(x, y, z)$. نعلم أنَّ كل عنصر حجمي dv ، يحتوي الشحنة $\rho(r)\mathrm{dv}$ ، يساهم في هذا الكمون بحيث يكون لدينا:

$$U(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r})\mathrm{dv}}{|\vec{R} - \vec{r}|} \qquad (21)$$

يتم نشر مقام العلاقة السابقة بحسب سلسلة تايلور بعد الأخذ بعين الاعتبار أنَّ:

$$|\vec{R} - \vec{r}|^{-1} = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2]^{-1/2}$$

وبالتالي فإنَّ الكمون يأخذ شكل سلسلة متقاربة:

$$U(\vec{R}) = \frac{q}{R} + \sum_i p_i \frac{X_i}{R^3} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{X_i X_j}{R^5} + \cdots \ldots\ldots\ldots \qquad (22)$$

حيث X_1 , X_2 , X_3 تمثل X, Y, Z و q, p_i, Q_{ij} تمثل العزوم الكهربائية متعددة الأقطاب للتوزع $\rho(\vec{r})$ علماً أنَّ:

$$q = \int \rho(\vec{r})\, dV$$

تمثل العزم الكهربائي أحادي القطب، هذا يعني القيمة العددية (السلّمية) للشحنة الكلية للجملة.

$$p_i = \int X_i . \rho(\vec{r})\, dV$$

تمثل العزم الكهربائي ثنائي القطب. أمّا:

$$Q_{ij} = \int \left(3X_i X_j - r^2 \delta_{ij}\right) \rho(\vec{r}) dV$$

يمثل إحدى مركبات الخمس الخطية المستقلة لعزم رباعي الأقطاب الكهربائي. على اعتبار أنَّ مركز ثقل توزع الشحنة الكهربائية منطبق على مبدأ الإحداثيات O، ويتم النشر وفق ذلك الفرض مكتفين بالحد الثاني من النشر.

نشير هنا أيضاً إلى أنّهُ مهما كان i و j فإنَّ Q_{ij} معدومة من أجل جسم ذات تناظر كروي. لهذا السبب فإنَّ قياس العزوم الرباعية للأقطاب الكهربائية تعطينا معلومات على شكل نوى كروية أو مشوهة.

تفاعل رباعي الأقطاب الكهربائية (طاقة التفاعل):

لنعتبر نواة ما متميزة بكثافة $\rho(\vec{r})$ موجودة في وسط معين حيث يسيطر الكمون الكهربائي $U(\vec{r})$. يعتبر هذا الوضع الطبيعي لكل نواة، حيث تخلق الإلكترونات الذرية في الوسط المحيط كمون $U(\vec{r})$ يؤثر على النواة. كتقريب أولي وباعتبار النواة كنواة نقطية (شحنة نقطية)، فتعطى طاقة التفاعل بين توزع الشحنة النووية والتوزع الإلكتروني بالعلاقة التالية:

$$W_0 = qU(0) \qquad (23)$$

حيث $q = Ze$ الشحنة النووية، $U(0)$ قيمة الكمون الإلكتروني (الناتج عن الإلكترونات الذرية)الذي تشعر به النواة في مبدأ الإحداثيات. إنَّ الحديث في المسائل النووية يستدعي العمل في البعد الثلاثي، أي أنَّ التكامل الأحادي سينقلب إلى تكامل ثلاثي، وأيضاً الوسط الموجودة فيه النواة النقطية هو وسط محدود ومنتهي وبالتالي يمكن استبدال الطاقة الكولونية بالعبارة التالية:

$$W = \int \rho(\vec{r}) \mathrm{U}(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \iiint \rho(x, y, z) \mathrm{U}(x, y, z) d\tau \qquad (24)$$

حيث: $d\tau = dxdydz$ عنصر حجمي.

نفترض أولاً أنَّ احتمال وجود الإلكترونات التي تولد الكمون $U(\vec{r})$ داخل النواة هو معدوم، ومن ثم ننشر الكمون وفق سلسلة تايلور بجوار المبدأ فنحصل على العلاقة التالية:

$$W = U(0)\iiint \rho d\tau + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 \iiint x\rho d\tau + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 \iiint y\rho d\tau + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 \iiint z\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \iiint x^2\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 \iiint y^2\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \iiint z^2\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 \iiint xy\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)_0 \iiint yz\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right)_0 \iiint zx\rho d\tau + \cdots \ldots .. \qquad (25)$$

يمثل الحدّ الأول من العلاقة (25) تفاعل الشحنة النووية q المتمركزة في نقطة والممثلة لأحادي الأقطاب مع الكمون $U(0)$

$$W_0 = U(0)\iiint \rho d\tau = qU(0)$$

يمثل الحدّ الثاني من العلاقة (25) طاقة ثنائي الأقطاب الكهربائي وهذا الحدّ معدوم بسبب وجود مركز تناظر، أي أنّهُ لا يوجد تفاعل ثنائي أقطاب كهربائي نووي.

$$\Delta W_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 \iiint x\rho d\tau + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 \iiint y\rho d\tau + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 \iiint z\rho d\tau = -\vec{p}.\vec{E}(0)$$

يمثل الحدّ الثالث من العلاقة (25) طاقة تفاعل رباعي الأقطاب الكهربائي وهو المفهوم الفيزيائي المستخدم في دراسة البنية النووية.

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \iiint x^2\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 \iiint y^2\rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \iiint z^2\rho d\tau$$

أما الحدود الأخيرة فهي معدومة، تختفي تلقائياً بسبب التناظر، حيث نقبل أنَّ توزع الشحنة الكهربائية يقبل المحور Oz كمحور تناظر والمستوي XOy كمستوي تناظر.

نشير إلى أنَّ معاملات الحدّ الثالث ليست مستقلة عن بعضها البعض وبملاحظة أنَّ التكاملات المتعلقة بـ x^2 وبـ y^2 متساوية وباستخدام معادلة لابلاس:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 = (\Delta U)_0 = 0$$

يمكن أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل التالي:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 = -2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = -2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0$$

وذلك على اعتبار أنَّ: $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0$

وبالتالي يمكن أن نكتب عبارة طاقة التفاعل لعزم ثنائي الأقطاب بالشكل التالي:

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 \iiint \frac{x^2 + y^2}{2} \rho d\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \iiint \frac{z^2}{2} \rho d\tau$$

بتبديل مربع نصف القطر $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ نحصل على الصيغة التالية:

$$\Delta W_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \iiint (2z^2 - x^2 - y^2)\, \rho d\tau$$

نضيف ونطرح z^2 نجد:

$$\Delta W_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \iiint (3z^2 - r^2)\, \rho d\tau = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 Q_{zz}$$

$$\Longrightarrow Q_{zz} = \iiint (3z^2 - r^2)\, \rho d\tau = Q_{int} \qquad (26)$$

نسمي العلاقة (26) العلاقة الكلاسيكية لعزم رباعي الأقطاب الكهربائي (النووي) الذاتي أو الخاص المُقدر في جملة الإحداثيات (ox, oy, oz).

سنهتم ببعض الأمثلة من أجل تحديد التعريف الدقيق لعزم رباعي الأقطاب:

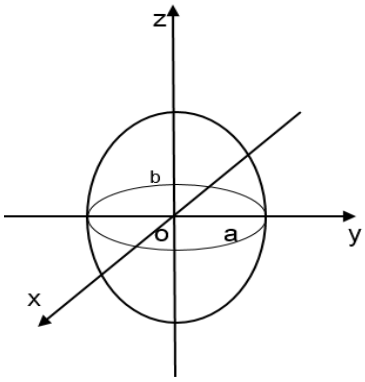
- **عزم رباعي الأقطاب الكهربائي الذاتي Q_{int} لنواة على شكل قطع ناقص (إهليليجية):**

بدايةً سوف نحسب عزم رباعي الأقطاب الكهربائي بالنسبة للمحور oz وبالتالي هذا المحور هو محور دوران للنواة المذكورة. وليكن مركز الدوران في النقطة o وليكن a,b نصفي قطر يالقطع الناقص.

وجدنا أنَّ عزم رباعي الأقطاب الكهربائي يُعطى بالعلاقة التالية: $Q_{int} = \iiint (3z^2 - r^2)\, \rho d\tau$

وإذا علمنا أنَّ معادلة القطع الناقص تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



يمكننا أن نكتب معادلة Q_{int} بالشكل التالي:

$$Q_{int} = \rho \iiint 2z^2\, d\tau - \rho \iiint (x^2 + y^2) d\tau$$

بعد الاستفادة من معادلة القطع الناقص وحساب التكاملات الواردة في العلاقة الأخيرة يمكن أن نجد التالي:

$$Q_{int} = \frac{8}{15}\pi a^2 b\rho(b^2 - a^2)$$

وبإظهار الشحنة النووية Ze المحتواة في حجم القطع الناقص الذي يساوي $\left(\frac{4}{3}\,\pi\,a^2 b\right)$:

$$Ze = \rho\left(\frac{4}{3}\,\pi\,a^2 b\right)$$

نحصل على عزم رباعي الأقطاب الكهربائي لنواة على شكل قطع ناقص منسوب لمحور الدوران OZ:

$$Q_{int} = \frac{2Ze}{5}(b^2 - a^2) \qquad (27)$$

وبما أنَّ نصفي المحورين a و b للنواة الإهليليجية قطع ناقص متساويان تقريباً كون انحراف النواة عن الشكل الكروي غير كبير، فإننا نعرّف مربع نصف القطر الوسطي للنواة على الشكل التالي: $R^2 = \frac{(a^2+b^2)}{2}$، ونقيس انحراف النواة على الشكل الكروي باتجاه الشكل الإهليليجي بواسطة معامل التشوه المعرّف بالعلاقة التالية:

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

بالتعويض في العلاقة (27) نحصل على:

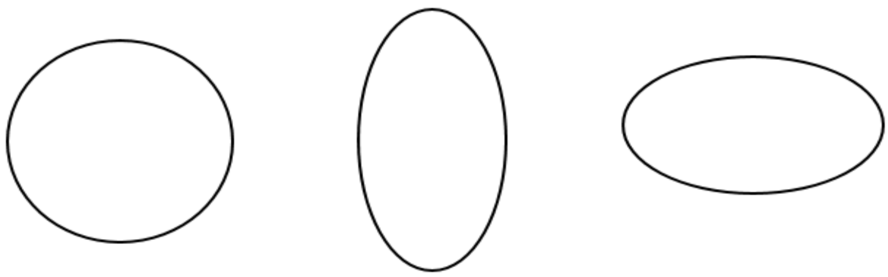
$$Q_{int} = \frac{4}{5}(Ze)R^2\eta \qquad (28)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة ما يلي:

1- $Q_{int} = 0$ من أجل $\eta = 0$ هذا يعني أنَّ $b = a$ وبالتالي ونقول في هذه الحالة أنَّ النواة كروية الشكل. هذا يعني أنَّ الكمون النووي أو الجهد النووي هو كمون مركزي.

2- $Q_{int} > 0$ من أجل $b > a$ ونقول في هذه الحالة أنَّ النواة كروية تأخذ الشكل الاهليلجي المتطاول ولها عزم رباعي أقطاب كهربائي موجب.

3- $Q_{int} < 0$ من أجل $b < a$ ونقول في هذه الحالة أنَّ النواة كروية تأخذ الشكل الاهليلجي المسطح ولها عزم رباعي أقطاب كهربائي سالب.



$Q_{int} = 0$	$Q_{int} > 0$	$Q_{int} < 0$
$b = a$	$b > a$	$b < a$