كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

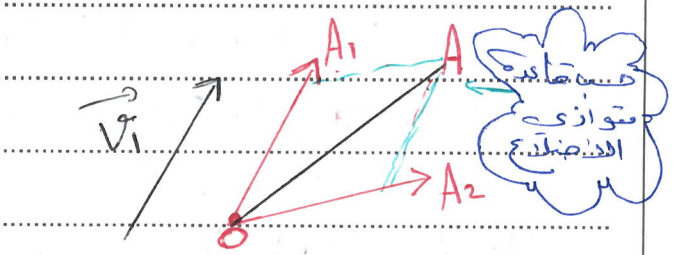
المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

* جمع المتجهات :

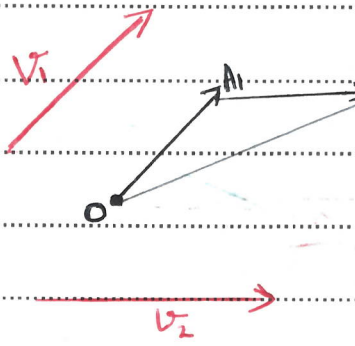
لجمع متجهين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ نرسم نقطة ما من الفضاء O متجهاً $\overrightarrow{OA_1}$ يساير $\vec{v_1}$ ومتجهاً آخر من $\overrightarrow{OA_2}$ يساير $\vec{v_2}$



فيكون $\overrightarrow{OA}$ ناتج جمع القاعدتين OA_1 و OA_2 الذي هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ عليهم.

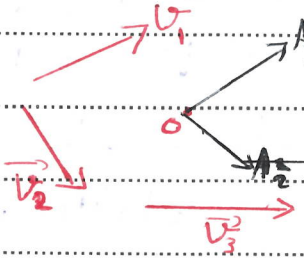
أو بطريقة أخرى: نشئ من نقطة ما O متجهاً $\overrightarrow{OA_1}$ يساير $\vec{v_1}$ ونشئ من نهاية $\overrightarrow{OA_1}$ أي من النقطة A_1 مسايراً للمتجه $\vec{v_2}$ فيكون OA ناتج جمع OA_1 و A_1A_2 (علاقة شال)

[redacted]



مثال

تعميم: ليكن لدينا $A_1A_2 \dots A_n$ متجهات ونريد جمعها، ننشئ من نقطة O متجهاً يساير $\vec{v_1}$ ثم من نهاية A_1 نرسم شعاعاً [redacted] يساير $\vec{v_2}$ [redacted] وهكذا ... $(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2})$ ؛



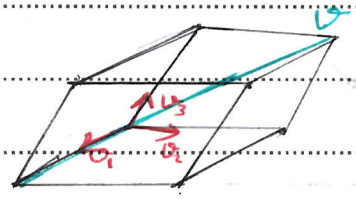
مبرهنة الشعاع الأخير $A_{n-1}A_n$

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

حالة خاصة:

إن مجموع ثلاثة متجهات لا تتوازى مثنى مثنى (قطر متوازي السطوح المنشأ عليها)

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$$



طرح متجهين:

حاصل طرح متجه $\vec{v_1}$ من متجه $\vec{v}$ هو إيجاد متجه $\vec{v_2}$

بحيث يكون: $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$$

نستنتج: حاصل طرح شعاعين لهما نفس المبدأ هو شعاع مبدأه نهاية الثاني ونهايته نهاية الأول.

جداء متجه بعدد حقيقي:

جداء متجه $\vec{v}$ بعدد حقيقي (عدد حقيقي) a هو متجه $(a\vec{v})$ طويلة المتجه $\vec{v}$ مضروب بالعدد a ومنحاه نفس $\vec{v}$ وجهته نفس جهة $\vec{v}$ (إذا كان a موجب) وعكس جهة $\vec{v}$ (إذا كان a سالب)

$\vec{v}$ و $a\vec{v}$ شعاعان مستقيمان طبعاً (متوازيان) أي:

$$\frac{\|\vec{v}\|}{\|a\vec{v}\|} = \frac{1}{|a|}$$

الجداء السلمي (الداخلي):

الجداء السلمي لمتجهين u_1 و u_2 هو عدد (مقدار سلمي) يساوي:

$$u_1 \cdot u_2 = \|\vec{u_1}\| \cdot \|\vec{u_2}\| \cos\theta$$

حيث أن: $\theta(u_1, u_2)$

فقد يكون الناتج (سالب أو موجب أو معدوم)

يكون الجداء السلمي معدوم عندما: $\cos\theta = 0$ أي $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

نتائج:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 0$	$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$
$\vec{j}\cdot\vec{j} = 0$	$\vec{j}\cdot\vec{k} = 0$
$\vec{k}\cdot\vec{k} = 0$	$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الجداء السلمي في الفضاء

$\vec{v_1}(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v_2}(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

خواص الجداء السلمي:

1) الجداء السلمي عملية تبديلية:

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = \vec{u_2}\cdot\vec{u_1}$

2) قابلية التوزيع على الجمع:

$\vec{u_1}(\vec{u_2}+\vec{u_3}) = \vec{u_1}\vec{u_2}+\vec{u_1}\vec{u_3}$

3) الخاصة المميزة الخطية:

$(\alpha\vec{u_1})(\beta\vec{u_2}) = (\alpha\beta)(\vec{u_1}\cdot\vec{u_2})$

حساب تجيب الزاوية بين متجهين:

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{|\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|}$

$= \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

نقول عن المتعامدين أنهما متعامدان عندما: $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$

مثال: احسب الزاوية بين المتجهين:

$\vec{u_1} = \vec{i}+\vec{k}$ $\vec{u_2} = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{u_1}(1,0,-1)$ $\vec{u_2}(2,-1,1)$

الحل:

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{|\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|}$

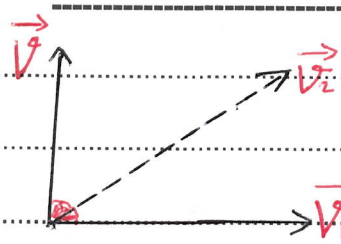
$= \dfrac{2+0-1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

الجداء المتجهي (الخارجي) (الشعاعي)

تعريف:

يعرف الجداء المتجهي لمتجهين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ بأنه متجه ثالث عمودي على مستوي المتجهين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ بحيث يؤلف مع $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ ثلاثية مباشرة $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u})$ أي أن الجداء الشعاعي لـ $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ هو متجه:



خواص الجداء السلمي

(1) مفهوم: معرف على $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ ويشكل معهما الثنائية:

$|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}| = |\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|\sin\theta$

(2) طويلة: حيث $\theta = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$

حالة خاصة: عندما $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$ عندئذ

$\theta = 0, \pi$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow |\vec{u_1}\times\vec{u_2}| = 0$

* الجداء السلمي لشاعيين متوازيان معدوم.

- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{u_1}(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{u_2}(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{u} = \vec{u_1}\times\vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$

- خواص الجداء السلمي:

(1) الخاصة النصف تبديلية:

$\forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{u_1}\times\vec{u_2} = -\vec{u_2}\times\vec{u_1}$

(2) قابلية التوزيع على الجمع:

$\vec{u_1}\times(\vec{u_2} + \vec{u_3})$

$= \vec{u_1}\times\vec{u_2} + \vec{u_1}\times\vec{u_3}$

(3) الخاصة النصف خطية:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u_1}, \vec{u_2} \in \mathbb{R}^3$

$(\alpha\vec{u_1})\times(\beta\vec{u_2}) = \alpha\beta(\vec{u_1}\times\vec{u_2})$

(4) إذا كان $\vec{u_1}\times\vec{u_2} = 0$ فإن إحداهما (الشعاع الصفري) أو $\vec{u_1} \parallel \vec{u_2}$ متوازيان.

تطبيقات الجداء الخارجي:

(1) مساحة مساحة مثلث ABC

$S = \frac{1}{2}|\vec{u_1}\times\vec{u_2}|$; $\vec{u_1} = AB$

; $\vec{u_2} = AC$

(2) مساحة متوازي أضلاع منشأ على شاعيين $\vec{u_1}, \vec{u_2}$:

$S = |\vec{u_1}\times\vec{u_2}|$

مثال: احسب مساحة المثلث أو متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين

$\vec{u_1} = 2\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{u_2} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{u_1}\times\vec{u_2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-4-1)\vec{i} - (0+1)\vec{j} + (0+2)\vec{k}$

$= -5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ $= (-5, -1, 2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} |\vec{u_1} \times \vec{u_2}|$

$= \frac{1}{2} \sqrt{25+1+4} = \frac{1}{2} \sqrt{30}$

مساحة متوازي الأضلاع

$S = \sqrt{30}$

الجداء المختلط :

الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$

هو الجداء السلمي لأحد هذه الأشعة $\vec{u_1}, \vec{u_2}$

وشعاع $\vec{u_3}$: $(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \times u_3$

$u_1 (x_1, y_1, z_1)$ $u_2 (x_2, y_2, z_2)$

$u_3 (x_3, y_3, z_3)$

$$|(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \times \vec{u_3}| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

- الجداء المختلط :

$(\vec{u_1} \times \vec{u_2}) * \vec{u_3}$

هو عدد حقيقي ويعبر عن حجم متوازي الوجوه المنشأ على هذه الأشعة

$$(u_1 \times u_2) \times u_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

خواص الجداء المختلط :

لا تتغير قيمة الجداء عند التبديل الدوري للأسهم :

(1) $(\vec{u_1} \times \vec{u_2}) \vec{u_3} = (\vec{u_2} \times \vec{u_3}) \vec{u_1} = (\vec{u_3} \times \vec{u_1}) \vec{u_2}$

(2) $(u_1, u_2, u_3) = (u_1 \times u_2) \vec{u_3}$

$= (u_2, u_1, u_3) = -(\vec{u_1}, \vec{u_3}, \vec{u_2})$

$= -(\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_1})$

(3) إذا ضرب أحد الأسهم بعدد فإن الجداء المختلط يضرب بهذا العدد

$(\alpha u_1, u_2, u_3) = \alpha (\vec{u_1}, u_2 \vec{u_3})$

(4) الخاصة التوزيعية على الجمع :

$(\vec{u_1} + \vec{u}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) =$

$(u_1, u_2, u_3) + (u_1 + u_2 + u_3)$

انتهت المحاضرة