كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة ٣

المحاضرة: الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

## خواص التوقع الرياضي:

① إذا كان $c$ مقدار ثابت فإن: $E(c) = c$ .

② إذا كان $a$ , $b$ أعداد ثابتة فإن: $E(aX+b) = aE(X)+b$

③ $E(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \cdots + c_nE(X_n)$

## خواص التباين:

① إذا كان $c$ ثابت فإن: $V(c) = 0$ .

② إذا كان $a$ , $b$ ثوابت فإن: $V(aX+b) = a^2V(X)$ .

③ إذا كان $X$ , $Y$ متغيرين مستقلين: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

## التغاير: نعرف لمتغيرين عشوائيين بالصيغة

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-EX)\cdot(Y-EY)\right]$$

$$= E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

وإذا كان $X$ , $Y$ مستقلين فإن: $Cov(X,Y) = 0$

وإذا لم يكن $X$ , $Y$ مستقلين فإن: $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

## متراجحة تشيبشف:

إذا كان $X$ متغير عشوائي له التوقع الرياضي $\mu$ , والانحراف المعياري $\sigma$ فإن:

أيا كانت $\varepsilon > 0$ فإن الاحتمال التالي: $P\left[|X-\mu| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ يعطي حدا

أعلى لاحتمال بغض النظر عن نوع توزيع المتغير $X$ .

مثال 1: إذا كان $X$ متغير عشوائي له التوقع الرياضي $\mu = \frac{7}{2}$ , التباين $\sigma^2 = \frac{35}{12}$ ,

فإن $\sigma = 1,708$ فإذا وجد $\varepsilon$ فإن $\varepsilon^2 = 2\sigma^2$ يكون $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}$ و:

$\varepsilon = \sqrt{2}(1,708) = 2,415$ عندئذ: $P\left[|X - \frac{7}{2}| \geq 2,415\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4}$

مثال 2: إذا كان: $\mu = \frac{8}{6}$ , $\sigma^2 = \frac{2}{9}$ , $\sigma = 0,471$ , وإذا وجد $\varepsilon = \frac{2}{3}$ فإن:

$$P\left[|X - \frac{8}{6}| \geq \frac{2}{3}\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وإذا أردنا حساب الحد الأعلى لهذا الاحتمال حيث $X$ متغير عشوائي مستمر معرف بالشكل:

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in [0,2] \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$

$$P\left(|X - \frac{8}{6}| \geq \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(|X - \frac{8}{6}| < \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(-\frac{2}{3} < X - \frac{8}{6} < \frac{2}{3}\right)$$

$$= 1 - P\left(-\frac{2}{3} + \frac{8}{6} < X < \frac{2}{3} + \frac{8}{6}\right) = 1 - P\left(\frac{2}{3} \leq X \leq 2\right) = 1 - \int_{\frac{2}{3}}^{2} f(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{x}{2}\,dx = 1 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{2}{3}}^{2} = 1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right) = \frac{1}{9}$$

## بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

1) توزيع برنولي: إنه تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط من بيئة الأدب المطلوبة

نجاح (S) احتمال $p$ ، والثانية فشل (F) واحتمال $q$ بحيث $p+q=1$ .

مثل رجوع طالب - نقود - تسجيل جنس مولود (ذكر أو أنثى) - رجوع طالب (ناجح، راسب).

- مريض (مصاب أو غير مصاب). فحص قطعة انتاج (سليمة أو تالفة).

نعرف متغير العشوائي الموافق $X$ الذي يمثل عدد مرات النجاح عند اجراء التجربة برنولي.

فنكون: $P(S)=p$ , $P(F)=q$

$P(X=1)=P(S)=p$

$P(X=0)=P(F)=q=1-p$

ثم نحول $X=\{0,1\}$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $q$ | $p$ |

وندعو المقدار: (دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي):

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \therefore x=\{0,1\} \\ 0 & \therefore x\neq\{0,1\} \end{cases}$$

ندعو توزيع برنولي بالوسيط $p$ ويمثل التوقع الرياضي: $E(X)=0(q)+1(p)=p$

والتباين

$$V(X)=pq$$

2) توزيع ذي الحدين: وهو توزيع احتمالي متقطع (منفصل):

يستخدم في تجارب برنولية متكررة عدداً من المرات حيث:

1) $n$ عدد المحاولات.

2) المحاولات مستقلة عن

3) احتمال النجاح $p$ ثابت لا يتغير لجميع المحاولات.

$X$ متغير عشوائي يدل على عدد مرات النجاح عند تكرار اجراء محاولة برنولي وتكون قيم التحول

$$X=\{0,1,2,\dots,n\}$$

ودالة الكتلة الاحتمالية:

$$f_X(x)=P(X=x)\begin{cases} \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & \therefore x=0,1,\dots n \\ 0 & \therefore x\neq 0,1,\dots n \end{cases}$$

يدعى هذا التوزيع توزيع ذي الحدين بالوسيط $n$ , $p$.

التوقع الرياضي:

$$\mu_X=E(X)=np$$

التباين:

$$\sigma_X^2=Var(X)=np(1-p)$$

عكتب تمثيل دالة الكتلة لهذا التوزيع بالجدول:

| $x$ | 0 | 1 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\binom{n}{0}p^0q^n$ | $\binom{n}{1}p^1q^{n-1}$ | ... | $\binom{n}{n}p^nq^0$ |

مثال: لدينا عملة معدنية غير متوازنة بحيث $P(H)=\frac{2}{5}$ و $P(T)=\frac{3}{5}$ رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل. لتكن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H.

1- أوجد دالة الكتلة الاحتمالية.

2- أحسب التوقع الرياضي (المتوسط) والتباين

1- أوجد احتمال: 1- الصورة صورتين (A)

2- الصورة صورتين على الأقل (B)

3- الصورة صورة واحدة على الأكثر (C)

4- الصورة على الثالث كتابة (D)

الحل: $p=\frac{2}{5}$ ، $q=\frac{3}{5}$ ، $n=3$

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases}\binom{3}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{3-x} & \therefore x\in\{0,1,2,3\}\\ 0 & \therefore x\neq 0,1,2,3\end{cases}$$

وعليه نمثل دالة الكتلة بالجدول:

| $x$ | $f_X(x)=P(X=x)$ |
|---|---|
| 0 | $\binom{3}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$ |
| 1 | $\binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$ |
| 2 | $\binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$ |
| 3 | $\binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$ |

$$\mu_X=E(X)=np=3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{5}$$

$$V_X=\sigma_X^2=npq=3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{18}{25}$$

إيجاد الاحتمالات.

$$P(A)=P(X=2)=\frac{36}{125}$$

$$P(B)=P(X\geq 2)=\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{44}{125}$$

$$P(C)=P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{27}{125}+\frac{54}{125}=\frac{81}{125}$$

$$P(D)=P(X=0)=\frac{27}{125}$$

تمرين ٢٥ : إذا علمت أن نسبة الانتاج بمصانع تؤدي لمصانع المصابيح هي ١٠٪ نأخذ عينة من ٥ مصابيح بشكل عشوائي من انتاج هذا المصنع ، فأوجد الاحتمالات التالية :

١- الحصول على مصباح واحد تالف . A

٢- " " على مصابيح تالفة . B

٣- " " مصباح واحد تالف على الأقل . C

٤- الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر . D

٥- أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة .

الحل : هي تجربة برنولي نجاح = الحصول على مصباح تالف واحتمالها $p = 0,1$

الفشل : " " سليم " $q = 0,9$

عدد المحاولات $n = 5$ ، والمحاولات مستقلة .

$X$ متغير عشوائي يدل على عدد المصابيح التالفة ، قيم المتغير العشوائي $\{0,1,2,3,4,5\}$

له دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير $X$ هي

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(0,1)^x(0,9)^{5-x} & \dots x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \dots x \neq 0,1,2,3,4,5 \end{cases}$$

وعليه تمثل دالة الكتلة بالجدول :

| $x$ | $f_X(x) = P(X=x)$ |
|---|---|
| 0 | $\binom{5}{0}(0,1)^0(0,9)^5 = 0,59049$ |
| 1 | $\binom{5}{1}(0,1)^1(0,9)^4 = 0,32805$ |
| 2 | $\binom{5}{2}(0,1)^2(0,9)^3 = 0,07290$ |
| 3 | $\binom{5}{3}(0,1)^3(0,9)^2 = 0,00810$ |
| 4 | $\binom{5}{4}(0,1)^4(0,9)^1 = 0,00045$ |
| 5 | $\binom{5}{5}(0,1)^5(0,9)^0 = 0,00001$ |

حساب الاحتمالات :

$$P(A) = P(X=1) = 0,32805$$

$$P(B) = P(X=5) = 0,00001$$

$$P(C) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,59049 = 0,40951$$

$$P(D) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,59049 + 0,32805 = 0,91854$$

العدد المتوقع للمصابيح التالفة من العينة . $E(X) = np = 5(0,1) = 0,5$

مكتبة A to Z