كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

مبرهنة: لتكن لدينا سلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

إذا كان $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ فإن السلسلة متباعدة

بطريقة أخرى

إذا كانت السلسلة متقاربة فإن $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$

ادرس التقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}+1\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-n}$$

السلسلة متباعدة $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

ملاحظة:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$= e$$

ومنه نتيجة: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} = e$

مثال: أوجد نهاية المتتالية $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$

ماذا نستنتج بالنسبة لـ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n} + \frac{3}{n}\right)^2$$

$$= \left[1 + \frac{3}{n}\right]^{\frac{n}{3} \cdot 3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e^3$$

السلسلة متباعدة لأن

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} + 1\right)$ متباعدة لأن

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{n} + 1\right) = 1 + 1 = 2$$

ملاحظة: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$a > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

سلسلة ريمان: شكل السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$$

غير حالات: $\lambda > 1$ ⟸ سلسلة متقاربة

$\lambda \leq 1$ ⟸ سلسلة متباعدة

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

ديريكلية أسها $\lambda = 3 > 1$ ⟸ متقاربة

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

ديريكلية أسها $\lambda = \frac{2}{3} < 1$ ⟸ متباعدة

اختبارات التقارب:

1. اختبار المقارنة: يعرض لدينا $\sum a_n$, $\sum b_n$

حيث $a_n \leq b_n$ فإن

a- $\sum b_n$ متقاربة ⟸ $\sum a_n$ متقاربة.

b- $\sum a_n$ متباعدة ⟸ $\sum b_n$ متباعدة.

2- اختبار النسبة: نأخذ أحد سلسلتين $\sum a_n$, $\sum b_n$

حيث $\lim \frac{a_n}{b_n} = k$ غير حالتين:

a- $k=0$, $\sum b_n$ متقاربة ⟸ $\sum a_n$ متقاربة

b- $k=\infty$, $\sum a_n$ متقاربة ⟸ $\sum b_n$ متقاربة

c- $0 < k < \infty$ ⟸ السلسلتين من طبيعة واحدة

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad 0 < x < 3\pi$$

ملاحظة: لدينا $\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \le \frac{x}{3^n}$

الحل:

$$2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \le \frac{2^n \cdot x}{3^n}$$

ولكن

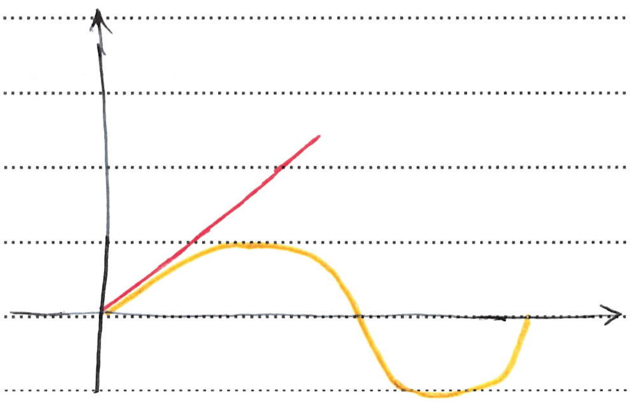
$\sum_{n=1}^{\infty} x\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة

لأنها هندسية أساسها $q = \frac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ متقاربة

* معلومات جانبية:

لماذا $\sin x \le x$



x	0		π
f'		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\pi$

$\sin x \le x$

$f = \sin x - x$

$F(0) = 0$

$F(\pi) = -\pi$ $\qquad f' = \cos x - 1 \le 0$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ادرس تقارب السلسلة بطريقتين

الحل: ط1

$$\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

اعيانية $\lambda = 2 > 1 \Leftarrow$ متقاربة

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$$

متقاربة حسب اختبار المقارنة

ط2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$$

نقارنها مع $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$\Leftarrow$ لهما نفس الطبيعة ولكن $\sum \frac{1}{n^2}$ رعيانية متقاربة

$\Leftarrow \sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ متقاربة.

مثال2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

ادرس التقارب

الحل: ندرس اختبار المقارنة مع $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} = 1$$

من نفس الطبيعة $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\Leftarrow \sum \frac{n}{n^3+1}$ متقاربة