كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : الكتروديناميك

المحاضرة: الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

8

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الرابعة

حركة الجسيمات المشحونة في الحقول الكهرطيسية

★ حركة الجسيم المشحون في الحقلين الكهربائي والمغناطيسي الثابتين:

تعد حركة الجسيمات المشحونة في الحقول الكهرطيسية، أحد الأقسام الهامة في علم الالكتروديناميك، فهي الأساس في الالكترونيات كافة في تقانة المسرعات، الجواهر الالكترونية وفي مطيافية الكتلوي وفي دراسة التفاعلات الحاصلة في البلازما وفي دراسة الظواهر النووية الحرارية وفي مجالات أخرى كالفيزياء الفلك والأشعة الكونية وغير ذلك ----

تقتصر دراستنا في هذا الفصل على معالجة أبسط أنواع هذه الحركة، ونفترض أن الحقل الخارجي المؤثر على الجسيمات المشحونة، أكبر بكثير من الحقل الخاص، الناتج عن حركة هذه الجسيمات بالذات

بكلام آخر نفترض أن الجسيمات المشحونة التي نتتبع حركتها بمثابة مسبرات اختبار، لا تغير الحقل الخارجي المؤثر.

1- نبدأ بدراسة حركة الجسيم المشحون في حقل كهربائي متجانس غير متغير مع الزمن.

حيث تكون معادلة حركة هذا الجسيم في الحالة الراهنة من الشكل:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} = -q\nabla\varphi \qquad (1.1)$$

نضرب طرفي المعادلة سلمياً بالسرعة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ نجد أن:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = -q\frac{dV}{dr}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= -q\frac{dV}{dt}$$

نجد أن $\frac{1}{2} m v^2 + q V = Const$ (1.2)

تعبر هذه العبارة عن قانون انحفاظ طاقة الجسيم المشحون المتحرك في حقل كهربائي متجانس وثابت

- من ذلك نرى أن الجسيم المشحون الذي يكون في البداية، في حالة سكون، ومن ثم يجتاز فرق كمون يساوي V يكتسب طاقة حركية، تساوي:

$$\frac{1}{2} m v^2 = |q| V$$

بالتالي يكتسب سرعة تساوي

$$v = \sqrt{\frac{2|q|V}{m}}$$

- فإذا كان هذا الجسيم المشحون هو الكترون حيث $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coul

$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ Kg

تكون السرعة التي يكتسبها مساوية:

$$v = 6 \cdot 10^5 \sqrt{V} \quad m/s$$

- يتضح من ذلك أن الالكترون الذي يجتاز فرقاً في الكمون يساوي فولطاً واحداً يكتسب سرعة تساوي $v = 6 \cdot 10^5$ m/s.

- تقاس الطاقة في الفيزياء الذرية بالالكترون فولط (eV)

والالكترون فولط هو الطاقة التي يكتسبها الجسيم المشحون الذي تساوي شحنته في القيمة المطلقة شحنة الالكترون عندما يجتاز فرقاً في الكمون يساوي 1 Volt

$$1 eV = 1,6 \cdot 10^{-19} Coul. 1 Volt = 1,6 \cdot 10^{-19} Joul.$$

- اذا كان الجسيم المشحون ساكناً في اللحظة $T=0$ وكان الحقل الكهربائي المؤثر متجانساً ولا متغيراً مع الزمن، ومحمولاً على المحور oX كانت معادلة حركته:

$$mX'' = qE \quad ; \quad m\ddot{y} = 0$$

- اذا كانت سرعته الابتدائية $\vec{v_0}$، تضع زاوية ما ولتكن θ مع المحور oy وكان في اللحظة الابتدائية في بداية الاحداثيات

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m} Et + v_0 \sin\theta$$

$$x = \frac{q}{2m} Et^2 + (v_0 \sin\theta)t$$

وبحساب الحركة على المحور oy نجد:

$$y = (v_0 \cos\theta)t$$

وبالتخلص من الزمن في عبارتي x و y السابقتين نجد معادلة مسار هذا الجسيم

$$x = (tg\,\theta)y + \frac{qE}{2m(v_0\cos\theta)^2} y^2 \quad (1.3)$$

أي أن الجسيم المشحون يتحرك عندئذٍ في مساره له شكل قطع مكافئ

2) أما عندما تكون حركة الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي فإن معادلة حركته تكون:

$$m\frac{dv}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.4)$$

نضرب بـ $\vec{v}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}^2 = const \quad (1.5)$$

- تؤكد هذه النتيجة أن الحقل المغناطيسي لا يقوم بعمل، لكونه لا يغير من قيمة الطاقة الحركية للجسيم المشحون المتحرك فيه، ولا يغير من القيمة العددية لسرعة هذا الجسيم وهذا ناتج عن كون القوة المؤثرة من جهة الحقل المغناطيسي قوة عمودية على منحى الحركة، لذلك لا تكون مؤهلة لإنجاز عمل، ولا تؤدي إلا إلى تغير في اتجاه سرعة الجسيم المشحون

- بالإمكان تعيين سرعة الجسيم المشحون، المتحرك في حقل مغناطيسي منتظم وثابت، من خلال مجموع مركبتي هذه السرعة

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_{//}} \qquad (1.6)$$

عندئذٍ تكون مركبة قوة لورانتز على طول الحقل المغناطيسي، مساوية الصفر

$$F_{//} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})_{//} = 0 \qquad (1.7)$$

وبإسقاط المعادلة (1.4) على طول الحقل المغناطيسي مع الأخذ بالحسبان المعادلة (1.7) نجد أن

$$m \frac{dv_{//}}{dt} = 0 \Rightarrow v_{//} = const \qquad (1.8)$$

أي أن مركبة سرعة الجسيم المشحون على طول الحقل المغناطيسي تبقى ثابتة

بوضع (1.6) في (1.4) مع الأخذ بالحسبان (1.8) نلاحظ أن:

$$m \frac{d\vec{v_1}}{dt} = q(\vec{v_1} \wedge \vec{B}) \qquad (1.9)$$

ونظراً لكون $\vec{v_1}^2 + \vec{v_{//}}^2 = \vec{v}^2 = const$ كما تبين من (1.5) نجد أن $\vec{v_1}^2$، تكون بدورها ثابتة

$$\vec{v_1}^2 = const \qquad (1.10)$$

تبقى الزاوية $\vec{v}_1, \vec{B}$ في المعادلة (1.9) ثابتة، في أثناء حركة الجسيم المشحون وتساوي $\frac{\pi}{2}$، ولا تتغير القيمة المطلقة لكل من $\vec{v}_1$ و $\vec{B}$ لذلك تبقى القوة المعينة في (1.9) ثابتة بالقيمة المطلقة وعمودية على السرعة، وبالتالي تعين المعادلة (1.9) حركة تسارعها ثابتاً، وعمودياً دائماً على السرعة، أي أن الحركة تكون حركة دائرية. فإذا رمزنا لنصف قطر هذه الدائرة بالرمز R_c، كان منسقط معادلة الحركة وفق الناظم على المسار من الشكل التالي:

$$m \frac{v_1^2}{R_c} = q v_1 B \qquad (1.11)$$

وتكون السرعة الزاوية مساوية:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{v_1}{R_c}$$

بالتالي نحصل من المعادلة (1.11) على الكميتين

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad ; \quad R_c = \frac{m v_1}{qB}$$

يسمى ω_c التواتر الدوراني (السيكلوتروني)

R_c نصف القطر الدوراني (")

- من الممكن الحصول على النتيجة السابقة بشكل آخر لنفترض أن الحقل المغناطيسي محمولاً على المحور OZ عندئذٍ باسقاط معادلة الحركة (على محاور جملة الإحداثيات الديكارتية)

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{qB}{m} y' \\ y'' &= -\frac{qB}{m} x' \\ z'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

تعني المعادلة الأخيرة أن الحقل المغناطيسي المحمول على المحور oz لا يؤثر في حركة الجسيم المشحون على طول هذا الحقل

للحصول على حل المعادلتين الأولى والثانية من جملة المعادلات (1.13) نضرب المعادلة الثانية بالعدد التخيلي i لنضع $\omega_c = \frac{qB}{m}$ وهي نجمع المعادلة الأولى مع المعادلة الثانية، فنجد

$$x'' + i y'' = -i\omega_c (x' + i y')$$

باستخدام المتحول $\eta = (x + i y)$ في هذه المعادلة، نجد أنها تأخذ الشكل البسيط التالي

$$\eta'' + i\omega_c \eta' = 0$$

من الواضح أن حل هذه المعادلة الأخيرة من الشكل: $\eta = c\, e^{-i\omega_c t}$

علماً أن c ثابت عقدي في الحالة العامة، لذلك يمكن تعيينه على شاكلة جداء طويلة a مضروبة بالمقدار الطوري $e^{i\varphi}$ أي أن $c = a\, e^{i\varphi}$ بالتالي نجد:

$$\eta = a\, e^{-i(\omega_c t - \varphi)} \qquad (1.14)$$

بفصل الجزئيين الحقيقي والتخيلي نلاحظ

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\omega_c t - \varphi) \\ y &= -a\sin(\omega_c t - \varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

وهي معادلة دائرة لذلك تكون حركة الجسيم المشحون حركة دائرية في المستوى (X,y) نصف قطرها $R_c = a$

ومن جملة المعادلتين (1.15) نلاحظ

$$v_x^2 + v_y^2 = a^2 \omega_c^2 = R_c^2 \omega_c^2$$

بالتالي:

$$R_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{m v_1}{qB}$$

وهي النتيجة نفسها التي توصلنا إليها في (1.12)

★ حركة الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي متجانس وثابت عند تأثير قوة خارجية ثابتة.

لنفرض أن الجسيم المشحون يقع تحت تأثير قوة أخرى ثابتة $\vec{F}$ زيادة على قوة لورانتز المغناطيسية. عندئذٍ نأخذ معادلة حركة هذا الجسيم الشكل التالي:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{q}{m}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.1)$$

فإذا كان الحقل المغناطيسي محمولاً على المحور oz كانت مساقط معادلة الحركة على المحاور الإحداثية

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \omega_c v_y + \frac{f_x}{m} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\omega_c v_x + \frac{f_y}{m} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{f_z}{m} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

علماً أن $\omega_c = \frac{qB}{m}$

من المعادلة الأخيرة من جملة المعادلات (2.2) نلاحظ أن الحقل المغناطيسي لا يؤثر في حركة الجسيم المشحون على طوله لذلك نوع جانباً دراسة هذه الحركة على طول الحقل المغناطيسي

- لنضرب المعادلة الثانية من جملة المعادلات السابقة في العدد التخيلي i ومن ثم نجمع الناتج مع المعادلة الأولى من الجملة المذكورة فنجد

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x + i v_y) = -i\omega_c (v_x + i v_y) + \frac{1}{m}(F_x + i F_y) \qquad (2.3)$$

من الملاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية، غير متجانسة، لذلك يكون حلها مجموع حلين: حل عام للمعادلة المتجانسة منها، وحل خاص لها. والحل العام للمعادلة المتجانسة

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_{x_1} + i v_{y_1}) + i\omega_c (v_{x_1} + i v_{y_1}) = 0$$

يكون من الشكل

$$v_{x_1} + i v_{y_1} = c e^{-i\omega_c t} = a e^{-i(\omega_c t - \varphi)}$$

وبالتالي نجد:

$$v_{x_1} = a\cos(\omega_c t - \varphi) \quad ; \quad v_{y_1} = -a\sin(\omega_c t - \varphi) \qquad (2.4)$$

وهما معادلتا سرعة حركة دورانية حيث

$$v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 = a^2 = v_\perp^2$$

أما الحل الخاص للمعادلة (2,3)، فمن الممكن الحصول عليه بسهولة بوضع الطرف الأيمن منها مساويا الصفر عندئذٍ نجد:

$$v_{x_2} + i v_{y_2} = \frac{F_y - i F_x}{qB}$$

$$v_{x_2} = \frac{F_y}{qB} \quad , \quad v_{y_2} = -\frac{F_x}{qB} \qquad (2.5)$$

وهما مركبتا سرعة، يمكن كتابتها بالشكل المتجه

$$\vec{v}_J = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \wedge \vec{B}}{B^2} \qquad (2,6)$$

وهذه السرعة الجديدة، عمودية على كل من $\vec{B}$ ، $\vec{F}$

بجمع الحلين السابقين (2.4)، (2.5) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x_1} + v_{x_2} = v_1 \cos(w_c t - \varphi) + \frac{F_y}{qB} \\ v_y &= v_{y_1} + v_{y_2} = -v_1 \sin(w_c t - \varphi) - \frac{F_x}{qB} \end{aligned}\right\} (2,7)$$

بالتالي تعين السرعة، التي تحقق المعادلة التفاضلية (2.3) على شاكلة تركيب خطي لسرعتين: سرعة حركة دورانية (2.4) ونرمز لها بالرمز $\vec{v}_R$ (الحل العام للمعادلة المتجانسة)

وسرعة الحركة المعينة في (2.6) $\vec{v}_J$ الحل الخاص للمعادلة (2.3)

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_J \qquad (2.8$$

تسمى السرعة $\vec{v}_J$ المعينة في (2.6) سرعة انجراف الجسيم المشحون

وهي سرعة ثابتة طالما كان الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ ، والقوة المؤثرة $\vec{F}$ ثابتان :

$$\frac{\delta \vec{v}_d}{\delta t} = 0 \qquad (2.9)$$

من الملاحظ أن سرعة الانجراف لا تتعلق بكتلة الجسيم المشحون. لكن تتعلق بقيمة ، وإشارة شحنته إذا كانت القوة $\vec{F}$ غير تابعة للشحنة. عندئذٍ تنجرف الجسيمات المشحونة بشحنات مختلفة في الإشارة باتجاهين متعاكسين. ويسمح هذا الانجراف بفصل الشحنات الموجبة عن الشحنات السالبة. زيادة على ذلك تسمح هذه السرعة بفصل الجسيمات المشحونة بشحنات مختلفة في القيمة العددية للشحنة أما إذا كانت القوة الخارجية $\vec{F}$ تابعة للشحنة ، فإن الوضع يختلف فإذا كانت هذه القوة كولونية صرفة $\vec{F} = q\vec{E}$ على سبيل المثال فإن عبارة سرعة الانجراف (2.6) تؤول إلى الشكل التالي :

$$\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \Rightarrow |v_d| = \frac{E}{B}$$

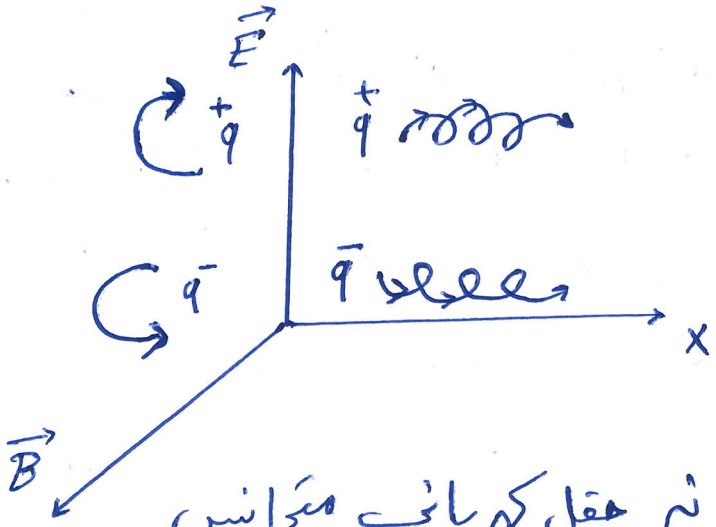
ولا تتعلق عندئذٍ سرعة الانجراف لا بقيمة الشحنة ، ولا بإشارتها ، ولا بكتلتها وتنجرف الجسيمات المشحونة جميعاً في اتجاه واحد.

* الانجراف في الحقل الكهربائي :

في هذه الحالة تكون سرعة الانجراف $\vec{v_d} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$

وتنجرف عندئذٍ جميع الجسيمات المشحونة، مهما كانت كتلها، أو شحناتها بسرعة واحدة وفي اتجاه واحد. حتى نتصور حركة الانجراف، نفترض أن جسيماً مشحوناً بشحنة موجبة q^+، يتحرك في مسار دائري بفعل حقل مغناطيسي متجانس أو ثابت $\vec{B}$ محمول على المحور oz حيث يكون عندئذٍ مسار هذا الجسيم، واقعاً في المستوي (xy)

الشكل التالي (1)



- فإذا وقع هذا الجسيم تحت تأثير حقل كهربائي متجانس وثابت $\vec{E}$ محمول على المحور oy فإن سرعة هذا الجسيم المشحون تزداد عندما يتزاح باتجاه تأثير هذا الحقل الأخير $\vec{E}$، وبالتالي يزداد نصف قطر قوس مساره في الجزء العلوي من هذا المسار أما عندما يتغير اتجاه حركة هذا الجسيم الذي كان يتحرك في مسار نصف قطر قوسه كبير بفعل الحقل المغناطيسي يبدأ بالحركة في الاتجاه المعاكس لاتجاه الحقل الكهربائي، وتتناقص من جراء ذلك سرعة هذا الجسيم وتتناقص نصف قطر قوس مساره في الجزء السفلي من هذا المسار حيث يعمل الحقل المغناطيسي في هذا الجزء على ثني مسار الجسيم بشكل أشد مما في الجزء العلوي

بالتالي يتم تغير اتجاه حركته على جزء صغير من مساره، ليبدأ حركته من جديد في الاتجاه، الذي يؤثر وفقه الحقل الكهربائي. عندئذ لا يعود الجسيم المشحون في أثناء انجازه لفة واحدة إلى النقطة التي بدأ منها حركته، بل ينساق وفق المحور OX في الاتجاه الموجب (من اليسار إلى اليمين) بعد إتمام كل دورة أو لفة.

- تقود المعالجة المماثلة في الحالة التي تكون فيها شحنة الجسيم سالبة الى حدوث انحراف في الاتجاه السابق نفسه، على الرغم من أن اتجاه الدوران، يكون معاكسا" تسمى هذه الظاهرة انحراف الجسيم (أو الجسيمات) المشحون في الحقل الكهربائي بالرجوع إلى عبارتي الحقلين الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ للموجة الكهرطيسية المستوية

نلاحظ أن سرعة الضوء هي بدورها سرعة انحراف في الحقل الكهربائي لهذه الموجة (نفترض أن متجهة الواحدة $\vec{i}$ محمولة على المحور ox)

- لتعيين مسار الجسيم المشحون، المتحرك تحت تأثير الحقلين الكهربائي والمغناطيسي السابقين فلو عدنا إلى مركبتي السرعة (2.7)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_1 \cos\left(\omega_c t - \varphi + \frac{E}{B}\right) \\ v_y &= -v_1 \sin(\omega_c t - \varphi) \end{aligned}\right\} (3.1)$$

بإجراء المكاملة نجد

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_1}{\omega_c} \sin(\omega_c t - \varphi) + \frac{E}{B} t \\ y &= y_0 + \frac{v_1}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) \end{aligned}\right\} (3.2)$$

ولتعيين مسار الجسيم المشحون الذي تعين حركته بالمعادلتين (3.2) نلاحظ أن سرعة الانجراف v_d المعينة بـ (2.10) تكون على المحولة على المحور OX كما تبين لنا من (3.2) لذلك يكون من الملائم الانتقال من المتحول X إلى متحول جديد X_1 معين بالشكل:

$$X_1 = X - v_d t = X - \frac{E}{B} t \qquad (3.3)$$

يحتفظ هذا التحويل بمعنى بسيط، وهو الانتقال من جملة الاحداثيات الأساسية إلى جملة إحداثيات جديدة، متحركة بالنسبة إلى الجملة الأساسية، بسرعة ثابتة تساوي $v_d = \frac{E}{B}$ ومحولة على المحور OX

باستخدام التحويل (3.2) نلاحظ أن مركبتي معادلة الحركة

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

تأخذان في جملة الإحداثيات الجديدة الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} X_1'' = X'' &= \omega_c y' \\ y' = \frac{q}{m} E - \omega_c X' &= \frac{q}{m} E - \omega_c \left(X_1' + \frac{E}{B}\right) = -\omega_c X_1' \end{aligned}\right\} (3.4)$$

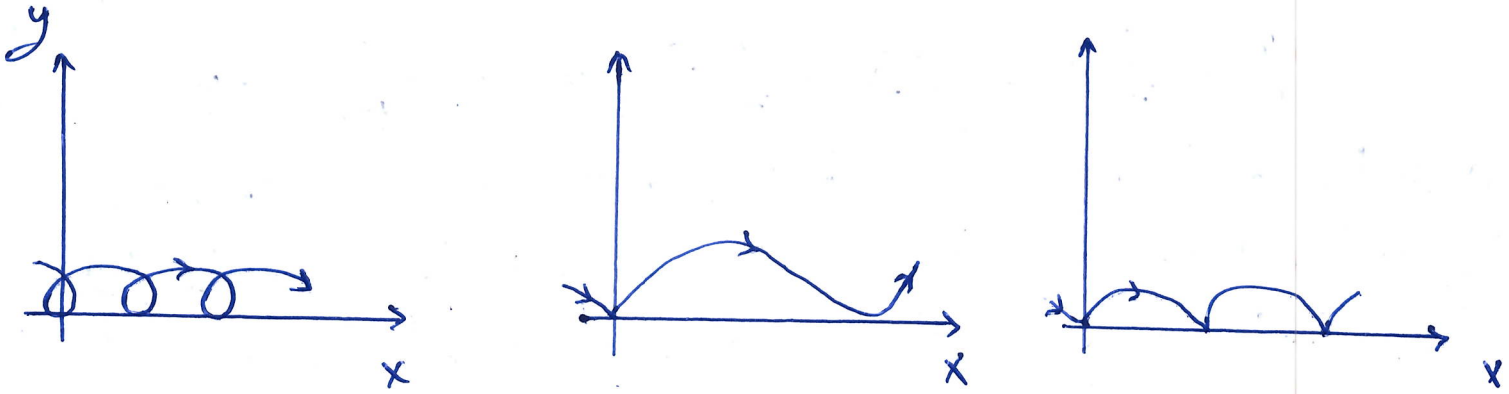
من الملاحظ في هاتين المركبتين الأخيرتين عدم وجود أي أثر للحقل الكهربائي وهما بمثابة معادلتي حركة الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي متجانس ثابت ومحول على المحور oz يتضح من ذلك أن الجسيم المشحون يتحرك في الجملة الجديدة $(x_1 y)$ حركة دائرية

بإجراء المكاملة مرتين للعبارتين (3.4) بالشكل المتبع في (3.1) نحصل على معادلة الحركة (3.2) نظراً لكون الجملة الجديدة (x, y) متحركة بالنسبة إلى الجملة الأساسية بالسرعة $v_e = \frac{E}{B}$ فإن الحركة المحصلة للجسيم المشحون هي تركيب من حركتين: حركة انسحابية منتظمة لمركز الدوران وفق المحور ox بسرعة ثابتة هي سرعة الانجراف $\vec{v_e}$

وحركة دورانية حول هذا المركز بسرعة تساوي $\vec{v_R}$

- ويعين تركيب هاتين الحركتين في الحالة العامة شكلا دحروجياً وتتعلق معادلات هذا الشكل الدحروجي بالشروط الابتدائية

- إذا كان الجسيم المشحون موجود أي اللحظة الابتدائية $t=0$ في مبدأ الإحداثيات وكان الطور $\varphi=0$ كانت $x_0=0$ وكانت $y_0 = -\frac{v_1}{\omega_c}$ كما يتبين لنا من (3,2) عندئذٍ يتعين المسار بقيمة مركبة السرعة v_1. فإذا كان $|v_1| > \frac{E}{B}$ يكون المسار الشكل الموضح في (3,a) وعندما $|v_1| < \frac{E}{B}$ يكون له الشكل الموضح في (3,b) أما عندما $|v_1| = \frac{E}{B}$ فيكون الشكل (3.c) الذي يسمى عادة السيكلويد



(3.a) (3.b) (3.c)

مكتبة A to Z