كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : الكتروديناميك

المحاضرة: الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة [2] الكترو ديناميك

★ الشروط الحدية :

تحدد معادلات ماكسويل التفاضلية كما ذكرنا العلاقة بين متجهات الحقول $\vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}$ في أي نقطة من الفراغ ولكنها لا تعلمنا عن هذه العلاقة فيما لو اصطدمت الموجات الكهراطيسية بسطح فاصل بين وسطين مختلفين أي فيما لو حدا انقطاع في الوسط فإن الصيغ التكاملية لهذه المعادلات يمكنا تحديد ما يحدث على السطح الفاصل بين وسطين مختلفين بالإستفادة من $\sigma, \rho, \varepsilon$.

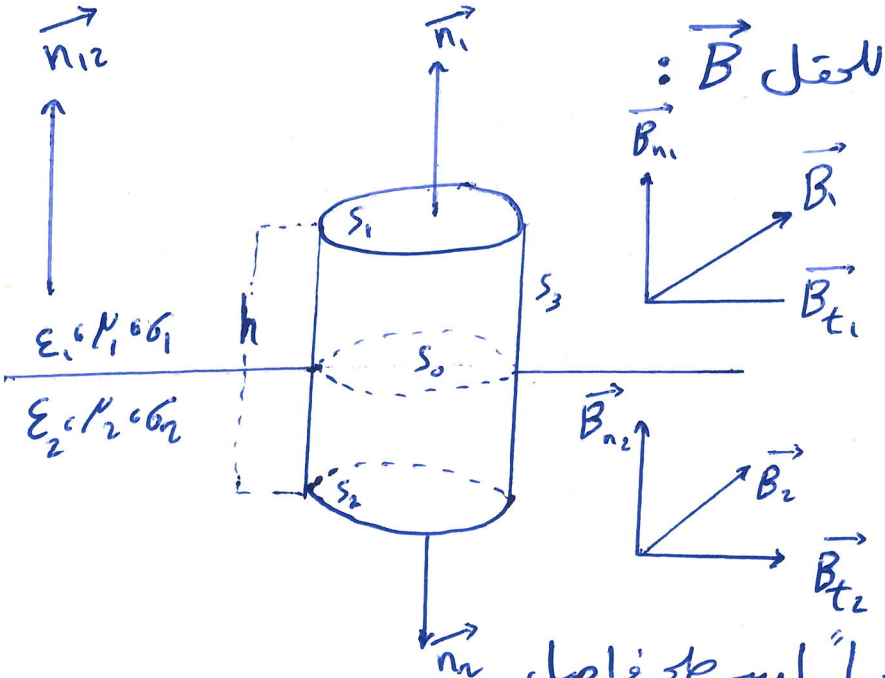
- يقصد بالشروط الحدية : دراسة تغيرات الحقل الكهراطيسي قرب الحدود الفاصلة بين الأوساط

---

[1] استمرار المركبة الناظمية للحقل $\vec{B}$:

- ننطلق من معادلة ماكسويل الثانية بصيغتها التكاملية

$$\oint \vec{B}.d\vec{s} = 0 \quad [1]$$



- يبين الشكل رسماً توضيحياً لسطح فاصل بين وسطين مختلفين تميز الأول بالمقادير $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ والثاني بالمقادير $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ولتكن $\vec{e}_t, \vec{e}_n$ متجهتا الواحدة المحمولتين على الناظم والمماس للسطح الفاصل على الترتيب .

نحلل $\vec{B}$ إلى مركبتين $\vec{B} = B_n \vec{e}_n + B_t \vec{e}_t$ [2]

نغشي على السطح الفاصل للوسطين المختلفين غشاء اسطواني الشكل بسماكة h لقاعدتيه السطحين S_1, S_2 وسطحه الجانبي S_3 من 1 نجد :

$$\oint_{S_1} B n_1 \, ds_1 + \oint_{S_2} B n_2 \, ds_2 + \oint_{S_3} B n_3 \, dS_3 = 0 \quad [3]$$

- نختار الاتجاه الموجب للناظم من الوسط الثاني إلى الوسط الأول ثم نطبق العلاقة [2]

يعني ليكون n_1 في الاتجاه الموجب، n_2 في الاتجاه السالب فنجد التالي

$$B_{n_1} S_1 - B_{n_2} S_2 + \bar{B} S_3 = 0$$

$\bar{B}$ القيمة المتوسطة لحقل التحريض المغناطيسي على السطح الجانبي

- للحصول على الشرط الحدي نجعل $h \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 \longrightarrow S_0 \quad , \quad S_3 = 0$$

وبالتالي

$$(B_{n_1} - B_{n_2}) S_0 = 0 \quad ; S_0 \neq 0$$

ومنه

$$B_{n_1} - B_{n_2} = 0$$

أو

$$\vec{e}_n (B_1 - B_2) = 0$$

ونستنتج منه $B_{n_1} = B_{n_2}$

ومنه المركبة الناظمية لحقل التحريض المغناطيسي مستمرة على السطح الفاصل بين الوسطين المختلفين

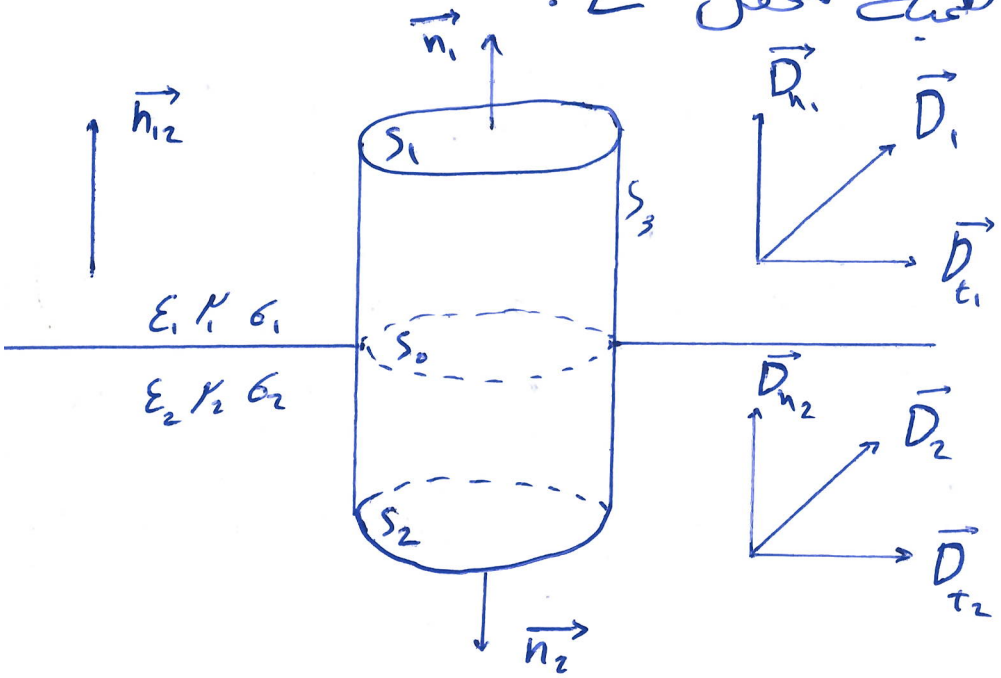
$$B_{n_1} = B_{n_2} \Rightarrow \mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2}$$

$$\Rightarrow \frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

- نستنتج من ذلك أن المركبة الناظمية للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ منقطعة على السطح الفاصل بمقدار $\frac{\mu_2}{\mu_1}$

---

2) انقطاع المركبة الناظمية للحقل $\vec{E}$:



- نطلق من الشكل التكاملي لمعادلة ماكسويل

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

- يبين الشكل وسطين توضيحاً للسطح الفاصل بين وسطين يتميز الأول بالمقادير ε_1، μ_1، σ_1 والثاني بالمقادير ε_2، μ_2، σ_2

- ولتكن $\vec{e}_t$، $\vec{e}_n$ متجهتا الواحدة الناظمية والمماسية على السطح الفاصل بالتالي نحلل $\vec{D}$ إلى مركبتين:

$$\vec{D} = \vec{e}_t D + \vec{e}_n D \quad (2)$$

$$\Longrightarrow D_t = \vec{e}_t \cdot \vec{D} \quad , \quad D_n = \vec{e}_n \cdot \vec{D}$$

- نتشئ على السطح الفاصل غشاءً رقيقاً اسطوانياً الشكل سماكته h قاعدتيه S_1، S_2، سطحه الجانبي S_3 من (1) نجد:

$$\oint_{S_1} \vec{D}\,\vec{n}_1\,dS_1 + \oint_{S_2} \vec{D}\,\vec{n}_2\,dS_2 + \oint_{S_3} \vec{D}\,\vec{n}_3\,dS_3 = q$$

- نختار الاتجاه الموجب للناظم من السطح الثاني إلى الأول فنجد:

$$D_{n_1} S_1 - D_{n_2} S_2 + \bar{D} S_3 = q$$

$\bar{D}$ القيمة الوسطية لحقل التحريض الكهربائي على السطح الجانبي.

- للحصول على الشرط الحدي نجعل $h \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow S_3 = 0 \quad , \quad S_1 = S_2 \longrightarrow S_0$$

وبالتالي نجد:

$$(D_{n_1} - D_{n_2}) S_0 = q$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \frac{q}{S_0} = \sigma_S$$

σ_s الكثافة السطحية للشحنات على السطح الفاصل بين الوسطين المختلفين

- هكذا نجد أن $\vec{D}$ متقطعة على السطح الفاصل بين الوسطين عندما تتواجد عليه شحنات سطحية.

a في النواقل: D_n تكون متقطعة لأنها تملك كثافة شحنات سطحية

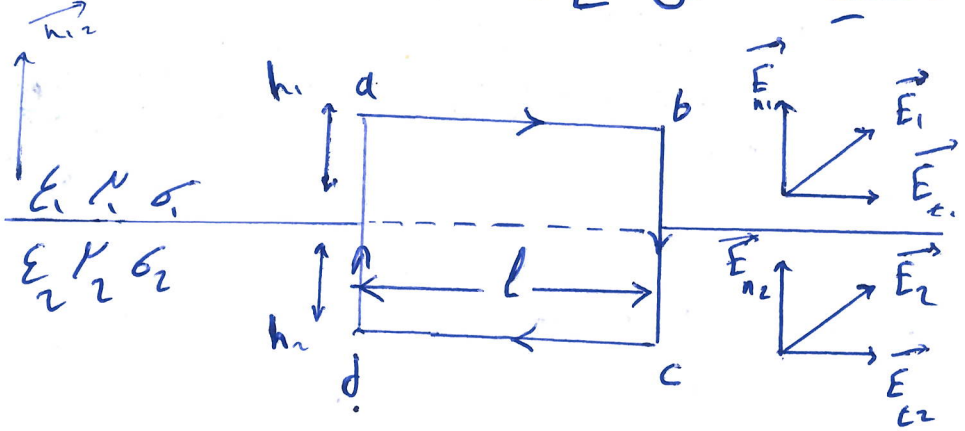
b في العوازل: D_n مستمرة لأنها لا تمتلك كثافة شحنات سطحية

- تكون المركبة الناظمية للحقل الكهربائي $\vec{E}$ متقطعة عند المواد العازلة والناقلة وتكون قيمة الانقطاع مساوية لـ $\frac{\sigma}{\varepsilon}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \sigma_s$$

3 استمرار المركبة المحاسية للحقل $\vec{E}$:



- نطلق من الشكل التكاملي لمعادلة ماكسويل

$$\oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_s \vec{B}\, d\vec{s} \quad [1]$$

- يبين الرسم شكل توضيحياً لسطح فاصل بين وسطين يتميز الأول بالمقادير μ_1 ، ε_1 ، والثاني بالمقادير μ_2 ، ε_2

- نتشئ غشاء رقيق على شكل مستطيل على السطح الفاصل بين الوسطين طوله l وعرضه في الوسط الأول h_1 وعرضه في الوسط الثاني h_2

- نأخذ الاتجاه الموجب للجولان ومن المعادلة 1 نجد:

$$\int_a^b E\,dl_1 + \int_b^c E(dh_1 + dh_2) + \int_c^d E\,dl_2 + \int_d^a E(dh_2 + dh_1)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial} \oint \vec{B}.d\vec{S}$$

وبالتالي:

$$l E_{t_1} - h_1 E_{n_1} - h_2 E_{n_2} - l E_{t_2} + h_2 E_{n_2} + h_1 E_{n_1} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}_n l (h_1 + h_2)$$

حيث $\bar{B}_n$ التدفق المغناطيسي الوسطي عبر الغشاء الرقيق، للحصول على الشرط الحدي نجعل $h_1, h_2 \longrightarrow 0$ يؤدي

$$l(E_{t_1} - E_{t_2}) = 0 \quad ; l \neq 0$$

$$\Rightarrow E_{t_1} - E_{t_2} = 0 \Rightarrow E_{t_1} = E_{t_2}$$

المركبة المماسية للحقل $\vec{E}$ مستمرة عند السطح الفاصل

- نستنتج انقطاع المركبة المماسية لكثافة التيار : $J = \sigma E$

$$\frac{J_{t_1}}{\sigma_1} = \frac{J_{t_2}}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{J_{t_1}}{J_{t_2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

يبلغ مقدار الانقطاع $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

★ هذه العلاقة غير محققة من أجل المواد التي تتصف بناقلية فائقة لأنها تمثلك كثافة تيار سطحية J_{sn} ومن جهة أخرى $\vec{E} = 0$ حيث $\sigma = \infty$ لأن

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{J}{\infty} = 0$$

وبالتالي :

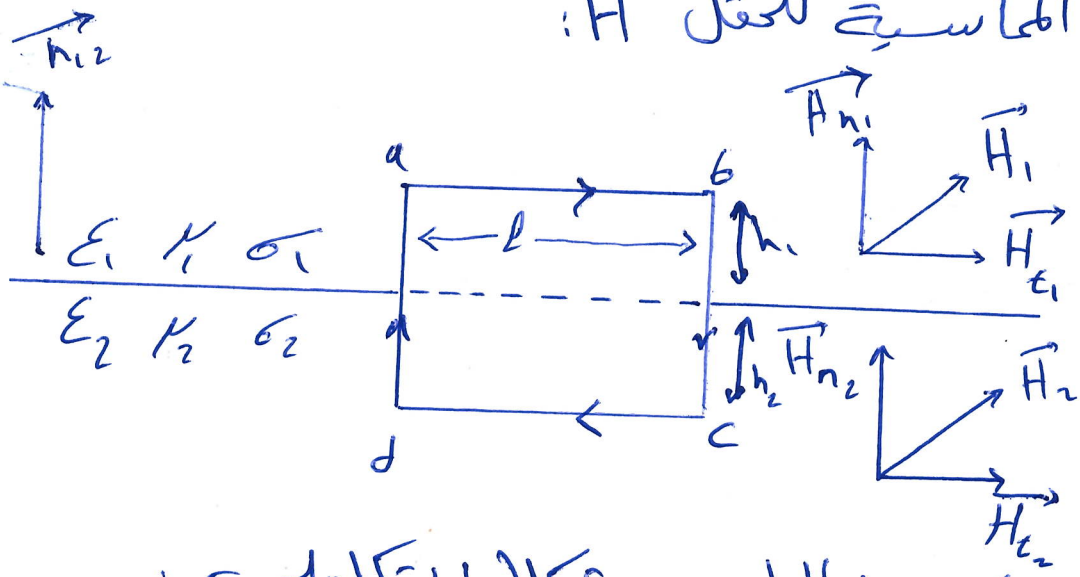
$$H_{t_1} - H_{t_2} = J_{sn}$$

- اذا كانت ناقلية الوسط الثاني كبيرة كفاية $\sigma_2 \to \infty$ فإن $E_2 = 0$ ، $H_2 = 0$ ، وتؤول العلاقة السابقة إلى

$$H_{t_1} = J_{sn} \Leftrightarrow \vec{e_n} \wedge \vec{H} = \vec{J_{sn}}$$

- نستنتج أن متجه الكثافة السطحية للتيار $\vec{J_{sn}}$ عمودية على اتجاه الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ ، يقعان في نفس المستوي

4) استمرار المركبة المماسية للحقل $\vec{H}$:



- ننطلق من معادلة ماكسويل الرابعة بشكلها التكاملي:

$$\oint_c \vec{H}\,d\vec{l} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{s} \qquad \boxed{1}$$

- يبين الشكل الحد الفاصل بين وسطين ماديين مختلفين يتميز الأول بالمقادير $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ والثاني بالمقادير $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$
- ننشئ غشاء رقيقاً على شكل مستطيل طوله l وعرضه في الوسط الأول h_1 وفي الوسط الثاني h_2
- نأخذ الاتجاه الموجب للجولان كما في الشكل السابق فنجد من المعادلة 1:

$$\int_a^b H\,dl_1 + \int_b^c H(dh_1 + dh_2) + \int_c^d H.dl + \int_d^a H(dh_2 + dh_1) = \int_s^d \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{s}$$

وبالتالي:

$$l H_1 - l H_{t_1} + h_1 H_{n_1} + h_2 H_{n_2} - h_1 H_{n_1} - h_2 H_{n_2}$$

$$= \left(J_n + \frac{\delta D_n}{\delta t} \right) l (h_1 + h_2)$$

- إذا كانت سرعة تغير الحقل للإزاحة الكهربائية كبيرة، أي المركبة الناظمية لكثافة التيار صغيرة جدا" بحيث يمكن إهمال $h_1 h_2 \longrightarrow 0$ فإننا نحصل على

$$l (H_{t_1} - H_{t_2}) = 0 \Rightarrow H_{t_1} = H_{t_2}$$

- هذا يعني أن المركبة المماسية للحقل $\vec{H}$ مستمرة على السطح الفاصل

- لكن المركبة المماسية للحقل $\vec{B}$ تكون منقطعة على السطح الفاصل، ومقدار هذا الإنقطاع يساوي $\frac{\mu_1}{\mu_2}$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu_1 B_{t_1} = \mu_2 B_{t_2} \Rightarrow \frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$