دراسة التكامل حسب النمط: $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

* لتكن $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ الكسر حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود عندئذٍ إذا كانت درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر أو تساوي كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام أي نجري القسمة الاقليدية لنجد: $P(x)=H(x)\times Q(x)+S(x)$

- $H(x)$ يمثل ناتج القسمة وهو كثير حدود.
- $S(x)$ (باقي القسمة) وهو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة $Q(x)$ (المقسوم عليه).

بالتالي: $\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{S(x)}{Q(x)}$

عندئذٍ: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int H(x)dx+\int \frac{S(x)}{Q(x)}dx$

$\int H(x)dx$ نجزء بسولين أو يطلب تفريق (تحليل) $\frac{S(x)}{Q(x)}$ إلى مجموع كسور من نمط بسيط

مثال: أوجد التكامل التالي:

$I=\int \frac{x^5}{x^2+1}dx$

نلاحظ بأن درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام لذلك نجري القسمة الإقليدية

$$x^5 = (x^3 - x)(x^2+1) + x$$

$$\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$$

$$I = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int (x^3 - x)\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

تفريق الكسور:

لتكن $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود ودرجة $Q(x)$ كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي يمكن كتابة الدالة الكسرية $R(x)$ على شكل مجموع منتهي من الدوال الكسرية البسيطة وبالتالي فإن $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ يؤول إلى إيجاد تكاملات لكسور بسيطة.

نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ الدالة الكسرية حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتي حدود، ودرجة $Q(x)$ كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذٍ إذا كانت $Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل هميط من الدرجة الأولى وغير مكررة.

أي

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ثوابت عددية تعيّن بطريقتين:

إمّا بتوحيد المقامات ثمّ ضرب بالمقام المشترك ثمّ المطابقة بين طرفي المساواة.

أو بتتبع الطريقة الآتية: لتعيين A_k نضرب الطرفين بالمقدار $(x-a_k)$ ثمّ نعوض $x=a_k$ في العلاقة الناتجة

مثال: أنجز التكامل الآتي:

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}\,dx$$

الحل: نلاحظ بأنّ درجة كثير الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثير الحدود في المقام بالتالي نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{2-x} \quad (*)$$

لتعيين A_1 نضرب x بـ $(x-1)$ نجد:

$$\frac{(x^2+1)}{(x+1)(2-x)} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x+1} + \frac{A_3(x-1)}{2-x}$$

نعوض $x=1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{1^2+1}{2\times 1} = A_1+0+0 \Rightarrow \boxed{A_1=1}$$

لتعيين A_2 نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+1)$ ثمّ نعوض $x=-1$ في العلاقة الناتجة نجد $A_2=-\frac{1}{3}$

لتعيين A_3 نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(2-x)$ ثمّ نعوض $x=2$ في العلاقة الناتجة نجد: $A_3=\frac{5}{3}$ ومنه:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{2-x}$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3}\int \frac{1}{2-x}$$

$$\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{5}{3}\ln|2-x| + c$$

مثال 3: أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$$

الحل:

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} \quad \cdots\cdots (*)$$

لتعيين A_1 نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x نجد:

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)} = A_1 + \frac{xA_2}{x-2} + \frac{xA_3}{x+3}$$

ونجعل $x=0$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

لتعيين A_2 نضرب طرفي العلاقة $*$ بـ $(x+3)$ ونجعل $x=-3$ في العلاقة الناتجة نجد $A_2 = \frac{9}{10}$

لتعيين A_3 نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+3)$ ونجعل $x=-3$ في العلاقة الناتجة نجد $A_3 = -\frac{26}{15}$ بعد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{26}{15}\cdot\frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx = \frac{5}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x| + \frac{9}{10}\ln|x-2| - \frac{26}{15}\ln|x+3| + C$$

الحالة الثانية:

لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود ودرجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذٍ إذا كانت $Q(x)$ تتحلل بالشكل $Q(x) = (x-a)^k$ أي $x-a$ مكرر k مرة حيث k عدد صحيح عندئذٍ

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^1}$$

حيث $A_k, \dots, A_3, A_2, A_1$ ثوابت عددية يطلب تعيينها.

مثال:

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)} \quad (*)$$

• لتعيين A_1 نضرب $(x+1)^3$ بـ $(*)$

$$x^2 = A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2$$

لتعيين A_1 نضرب $*$ بـ $(x+1)^3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x^2 = A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2$

نعوض $x=-1$ في العلاقة الناتجة

$A_1 = 1$

نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ثم نجعل $x \to +\infty$ نجد

$A_3 = 1$

نعوض $x=0$ في طرفي العلاقة * نجد:

$A_1 + A_2 + A_3 = 0$

بالتالي $A_2 = -2$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1| + C$$

مثال: أوجد التكامل الآتي:

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}\,dx$$

الحل: لدينا:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$

مقام التكامل $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ فيه x بسبب الدرجة الأولى و $(x-1)$ مكرر ثلاث مرات عندئذٍ:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

يتوحد المقام في هذه الطرف الثاني ثم نضرب الطرفين بالمقام المشترك $x(x-1)^3$ نجد:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + D x(x-1)^2$$

$$x^3+1 = (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -3A+C-2D=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $A=-1$ و $B=2$ و $C=1$ و $D=2$ ومنه

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$$

الحالة الثالثة: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ والتي كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود ودرجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذٍ إذا كانت $Q(x) = (ax^2+bx+c)^k$ حيث $k \geq 1$ عدد طبيعي وثلاثية الحدود التربيعية ax^2+bx+c مميزة سالبة عندئذٍ الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يتحلل بالشكل التالي

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^1}$$

لتعيين الثوابت العددية نضرب طرفي العلاقة بـ $(ax^2+bx+c)^k$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ثم نقوم بعملية المطابقة. كما توجد طرق أخرى لإيجاد الثوابت نوضح لاحقاً بعض الأمثلة.

ملاحظة عامة: لتكن $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود ودرجة $Q(x)$ كثير الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثير الحدود في المقام عندئذٍ إذا كانت:

$$Q(x)=(x-a)^m(ax^2+bx+c)^r$$

~~ax^2+bx+c كثير حدود غير قابل للتحليل~~

~~$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(ax^2+bx+c)^r}=\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^r}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^1}$$~~

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(ax^2+bx+c)^r}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)}+\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)^r}$$

$$+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}+\cdots+\frac{B_rx+C_r}{(ax^2+bx+c)}$$

مثال: أوجد التكامل الآتي:

$$I=\int\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

الحل:

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\quad\cdots(*)$$

نضرب طرفي العلاقة $*$ بـ $(x-1)^2$ ونعوض $x=1$ نجد $A=2$

نضرب طرفي العلاقة $*$ بـ x ثم نجعل $x\to\infty$

$$B+C=0\quad(1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض $x=0$ في طرفي العلاقة (*) نجد

$$-1=D-1B \quad \dots (2)$$

نعوض $x=-1$ في طرفي العلاقة (*) نجد

$$0=-1B-C+D+1 \quad \dots (3)$$

من (1) نجد $B=0$ عندئذ $C=0$ و $D=-1$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow I=\int\left(\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{x-1}-\arctan(x)+C$$

مثال 7:

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9=x^2(x^2+4x+4)-9=x^2(x+2)^2-(3)^2$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-(3)^2=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$

$$=(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$$

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

نضرب العلاقة بـ $(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$ بعد الاختصار نجد

$$7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+(9A+B-3C+2D)x+(9A-3D-3B)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B+2C+D=7 \\ 9A+B-3C+2D=26 \\ 9A-3D-3B=-9 \end{cases}$$

نجد من الجملة نجد: $A=1,\ B=1,\ C=-2,\ D=5$

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+2-7}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+2}dx$$

$$\ln|x-1| + \ln|x+3| - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

مثال: أوجد التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)}dx$$

$$\frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

بالمطابقة نجد: $A=1,\ B=0,\ C=1$

$$I = \int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+4}\right)dx = \ln|1+x| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقدم الآن بعض الأمثلة من أجل ترسيخ المفاهيم السابقة

مثال 9:

$$I=\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

$$x^4+1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+2$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1}=x-1+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}$$

$$I=\int\left(x-1+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right)dx=\int\left(x-1+\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\right)dx$$

$$I=\int(x-1)\,dx+\int\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int(x-1)\,dx \text{ ؛ } I_2=\int\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$ نبدأ بـ

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\quad\cdots(*)$$

إيجاد A: نضرب * بـ $x+1$ ونعوض $x=-1$ نجد $A=1$

إيجاد B: نضرب (*) بـ x ونجعل $x\to\infty$ نجد $A+B=0$

$B=-1$ ومنه

إيجاد C نعوض $x=0$ في (*) نجد $C=1$

$$I_2=\int\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C_2$

عند نشر

$I = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x$

مثال 10

$$I = \int \frac{x^5+x^3+2x^2+1}{x^3+x}\,dx$$

بإجراء القسمة الاقليدية $x^5+x^3+2x^2+1 = x^2(x^3+x) + (2x^2+1)$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{2x^2+1}{x^3+x}\right)dx = \int \left(x^2 + \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}\right)dx$$

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بالتشابه $A=1$ ، $B=1$ ، $C=0$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

مثال 11

$$I = \int \frac{x}{x^4-16}\,dx$$

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad \cdots (*)$$

نوجد A بضرب طرفي * بـ $x+2$ ونعوض $x=-2$ $\Rightarrow A = \frac{1}{16}$

نوجد B بضرب طرفي * بـ $x-2$ ونعوض $x=2$ $\Rightarrow B = \frac{1}{16}$

نوجد C و D بضرب * بـ x ومهل $x \to \infty$ عندئذ

$C = -\frac{2}{16}$ و $D = 0$

بالتالي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int \frac{x}{x^4-16}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{16}}{(x+2)} + \frac{\frac{1}{16}}{(x-2)} - \frac{\frac{2}{16}x}{x^2+4} \right) dx$$

$$\frac{1}{16}\ln|x+2| + \frac{1}{16}\ln|x-2| - \frac{1}{16}\ln(x^2+4) + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x^2+4}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right| + C$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة