كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٤

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الدوال الحقيقية التابعة لمدة متحولات أو متغيرات:

★ تعريف: لتكن F مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^n$ أي أن $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ندعو كل دالة $x = (x_1, \dots, x_n)$ من المجموعة F وقيمها بمدد حقيقي u وندعو R بدالة حقيقية وقيمها بمدد حقيقي u من R بدالة حقيقية تابعة لمدة متحولات (متغيرات) أو دالة حقيقية تابعة لـ n متحول حقيقي ونكتب في هذه الحالة:

$$u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

وندعو u هنا قيمة الدالة f عند النقطة $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $(x_1, \dots, x_n)$ المتحولات التابعة لها الدالة f وندعو مجموعة النقط $\{u : u = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ بمجموعة قيم الدالة f

★ عندما يكون $n = 1 \Leftarrow f$ دالة حقيقية تابعة لمتحول حقيقي واحد، يكون لدينا $y = f(x)$

مثال عنها $y = \cos x$

$y = 2x^2 + 3$

★ عندما يكون $n = 2 \Leftarrow f$ دالة حقيقية تابعة لمتحولين أي لدينا: $z = f(x, y)$ أو $u = f(x_1, x_2) \Leftarrow$ دالة تابعة لمتحولين x_1, x_2

مثال: $u = 4x^2 + 5y^2$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

★ عندما $n=3$ <= f تابعة لثلاث متحولات حقيقية أي:

$$u=f(x)=f(x_1,x_2,x_3)$$

وهكذا ...

نرمز $u=f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$; $x=(x_1,\dots,x_n)$

$\in E \subset \mathbb{R}$

دالة تابعة لـ n متغير (متحول) هي $x_1,\dots,x_n$ وفقاً لبعد الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$

★ بيان دالة f :

إذا كانت $f: E\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة بعدة متحولات عندئذٍ مجموعة النقط:

$$\{x, f(x)=(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)); x=x_1,\dots,x_n \in E\}$$

من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^{n+1}$ بيان دالة.

مثال: $y=f(x)$

تمثل في المستوى $\mathbb{R}^2$ الثنائي البعد خطاً منحنياً والدالة $u=f(x_1,x_2)$ تمثل في الفراغ $\mathbb{R}^3$ الثلاثي البعد جسم فراغي.

★ ملاحظة:

لتعيين مجموعة تعريف الدوال التابعة لعدة متحولات نستخدم نفس المفاهيم المستخدمة لتعيين مجموعة تعريف الدوال التابعة لمتحول حقيقي واحد مع إضافة بعض المفاهيم التي يجب تعميمها من أجل هذه الدوال.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* عين مجموعة تعريف التوابع:

1) $u = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

2) $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

3) $u = \ln(9 - x^2 - y^2 - z^2) = f(x, y, z)$

4) $u = \arcsin(z / \sqrt{x^2 + y^2})$

5) $u = 6xy / (x^2 + y^2)$

الحل:

1) التابعة u تابعة لمتحولين حقيقيين x و y وهي معرفة عندما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر أي من أجل جميع النقاط (x, y) في $\mathbb{R}^2$ والتي يتحقق من أجلها:

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25$$

إذاً التابعة f معرفة على مجموعة النقط:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 25\} \subset \mathbb{R}^2$$

أي مجموعة النقط (x, y) في المستوي $\mathbb{R}^2$ والواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 5

2) تابعة u تابعة لمتحولين x, y وهي معرفة عندما

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \Leftarrow$$

$$0 + 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi + 2\pi k$$

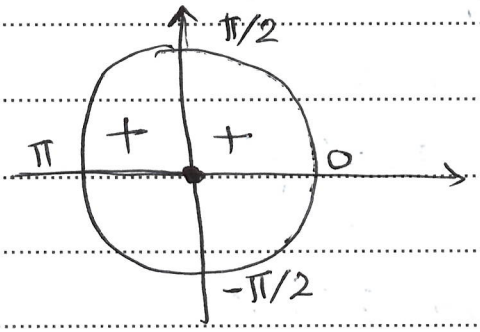
; $k = 1, 2, \ldots$

تابعة u معرفة على مجموعة نقط:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi + 2\pi k, k = 1, 2 \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* علماً أنّ $\sin x$ يكون موجباً في الربعين الأول والثاني كما في الشكل:



نهاية تابع:

تعريف نهاية تابع تابعية لعدة متحولات:

1) تعريف أولي وفق مفهوم الجوار:

لتكن $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ التابعية معرفة بالشكل:

$$u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad ; \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$$

نسمي العدد الحقيقي a حيث $a \in \mathbb{R}$ نهاية التابع $u=f(x)$ في نقطة $x = x^0$ أي عندما $x \to x^0$ حيث $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ نقطة من $\mathbb{R}^n$ حيث x^0 نقطة تراكم للمجموعة E إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ ; \forall x \in E \ \& \ d(x, x^0) < \delta \Rightarrow d(f(x), a) < \varepsilon$$

($d(x, x^0)$ في $\mathbb{R}^n$ ، $d(f(x), a)$ في $\mathbb{R}$)

ويمكن كتابة الشرط السابق بالشكل:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ ; \forall x \in E \ ; \|x - x^0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

وبطبيعة الحال تكتب الشرط السابق بالشكل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; ; \; \forall x \in E \cap N(x^0, \delta) \Rightarrow$

$f(x) \in N(a, \varepsilon)$

في هذه الحالة عندما يكون الشرط السابق محقق بكافة أشكاله نكتب:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{أو} \quad f(x) \underset{x \to x^0}{\longrightarrow} a$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in E \; ; \; x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ ؛

أو نكتب:

$$\lim f \in d(x) = a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \to x_1^0 \\ \vdots \\ x_n \to x_n^0 \end{array} \right\} \quad x \to x^0$$

ب) تعريف ثاني وفق مفهوم المتتاليات:

لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^n \to R$ دالة تابعة لعدة متحولات بالشكل التالي:

$u = f(x_1, \dots, x_n) \; ; \; \forall x = (x_1, \dots x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$

نقول عن العدد الحقيقي a إنّه نهاية الدالة f (أو $u = f(x)$) في نقطة $x = x^0$ (أو عندما $x \to x^0$) حيث: $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ نقطة تراكم للمجموعة E إذا تحقق الشرط الآتي:

$\forall (x^k)_{k \geq 1} \; ; \; x^k \in E \subset \mathbb{R}^n \; ; \; k = 1, 2, \dots$

$$\& \quad x^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x^0 \Rightarrow f(x^k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي من أجل أي متتالية $(x^k)_{k\geq 1}$ من نقاط المجموعة E متقاربة من نقطة x^0 عندئذٍ صورتها وفق f تسعى نحو a، ونكتب في هذه الحالة: $\lim_{x\to x^0} f(x) = a$

* ملاحظة:

لإثبات أن f دالة ما ليس لها نهاية عندما $x = x^0$ يكفي أن نأخذ متتاليتين من نقط المجموعة وهي محتوية ضمن f بحيث أن هاتين المتتاليتين على سبيل المثال:

* المتتالية الأولى هي: $(x^k)_{k\geq 1}$ من نقط المجموعة E بحيث يكون $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^0$

* متتالية ثانية: $(x'^k)_{k\geq 1}$ من نقاط المجموعة E بحيث يكون $x'^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^0$ نبين أنّ: $\lim_{k\to\infty} f(x^k) \neq \lim_{k\to\infty} f(x'^k)$

$\Rightarrow$ عندئذٍ نقول أن الدالة f ليس لها نهاية عندما $x \to x^0$ أو هي في أي نقطة $x = x^0$

* ملاحظة ثانية هامة للتطبيق العملي:

لإثبات أن $\lim_{x\to x^0} f(x) = a$ يكفي أن نثبت أنّ:

أي $|f(x) - a| \xrightarrow[x\to x^0]{} 0$ $\Leftrightarrow$ $d(f(x), a) \xrightarrow[x\to x^0]{} 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

★ ملاحظة ثالثة/ليست دارسة للتطبيق الحلي/

إنّ التعريف الأول والثاني لنهاية دالة وفقاً لمفهوم الجوار ومفهوم المتتاليات هما تعريفان متكافئان.

★ ملاحظة: إنّ خواص نهاية دوال تابعة لعدة متحولات هي نفسها خواص نهايات الدوال التابعة لمتحول واحد،

أي: إذا كانت $f: E \subset \mathbb{R}^n \to R$ بحيث:

$$u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

و $g: E \subset \mathbb{R}^n \to R$ بحيث:

$$z = g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$$

عندئذٍ إذا كان: $\lim_{x \to x^0} f(x) = a$ و $\lim_{x \to x^0} g(x) = b$

حيث: $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$

عندئذٍ:

★ $\lim_{x \to x^0} (f \pm g)(x) = a \pm b$

★ $\lim_{x \to x^0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$

★ $\lim_{x \to x^0} (cf)(x) = c \cdot a$

★ $\lim_{x \to x^0} (f/g)(x) = \frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة