كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) أوجد التقوس و الالتفاف للمنحني الممثل بالمتجل :

$$\vec{x} = (t - \sin t)\vec{e_1} + (1 - \cos t)\vec{e_2} + t\vec{e_3}$$

الحل

التقوس :
$$k = \frac{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3}$$

$$\vec{x}' = (1 - \cos t)\vec{e_1} + (\sin t)\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$$
$$\vec{x}'' = (\sin t)\vec{e_1} + (\cos t)\vec{e_2}$$
$$\vec{x}''' = (\cos t)\vec{e_1} + (-\sin t)\vec{e_2}$$

$$\vec{x}' \wedge \vec{x}'' = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1-\cos t & \sin t & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos t)\vec{e_1} + (\sin t)\vec{e_2} + (\cos t - 1)\vec{e_3}$$

$$|\vec{x}' \wedge \vec{x}''| = \sqrt{1 + (\cos t - 1)^2}$$

$$|\vec{x}'| = [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 1]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3 - 2\cos t}$$

$$k = \sqrt{\frac{1 + (\cos t - 1)^2}{(3 - 2\cos t)^3}}$$

الالتفاف :

$$\tau = \frac{(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2}$$

$$(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') = \begin{vmatrix} -\cos t & \sin t & 1 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tau = \frac{-1}{1 + (\cos t - 1)^2}$$

وظيفة : [2] أوجد التقوس و الالتفاف للمنحني المعطى بالتمثيل :

$$\vec{x} = a(1 + \cos t)\vec{e_1} + a \sin t \, \vec{e_2} + 2a \sin \frac{t}{2} \vec{e_3}$$

[3] ليكن C المنحني المعطى بالمعادلات :

$$x = 2\cos^3 t \qquad y = 2\sin^3 t \qquad z = 3\cos 2t$$

و $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

① أوجد متجهات الوحدة $\vec{B}$ و $\vec{N}$ و $\vec{T}$ في النقطة M من المنحني الموافقة للقيمة $t = 0$.

② احسب طول قوس المنحني بين النقطتين $t_0 = 0$ و $t_1 = \frac{\pi}{4}$

③ اكتب معادلة المستوي الماس و المستقيم الماس و الناظم الأساسي في النقطة الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{4}$.

④ اكتب معادلة المستوي الناظم للمنحني في نقطة تقاطعه مع المستوي $z = 0$.

الحل

$$\vec{r}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t, 3\cos 2t)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{r}'(t) = (-6\sin t\cos^2 t,\ 6\cos t\sin^2 t,\ -6\sin 2t)$ ①

$\vec{T} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$: متجه وحدة المماس

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{36\sin^2 t\cos^4 t + 36\cos^2 t\sin^4 t + 36\sin^2 2t}$

$= 6\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin^2 2t}$

$= 6\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t} = 6\sqrt{5}\,|\sin t\cos t|$

$\vec{T} = \left(\dfrac{-\cos t}{\sqrt{5}}, \dfrac{\sin t}{\sqrt{5}}, \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \vec{T}\Big|_{t=0} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

نعلم من علاقات فرينيه أن: $\vec{T}' = K\vec{N}$

أي $\vec{N} = \dfrac{\vec{T}'}{K}$

و $K = |\vec{r}''(s)| = |\vec{T}'|$

ومنه $\vec{N} = \dfrac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|} = \dfrac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$

وبهذه الحالة: $\vec{N} = \dfrac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$

$\vec{T}' = \left(\dfrac{\sin t}{\sqrt{5}}, \dfrac{\cos t}{\sqrt{5}}, 0\right) \Rightarrow |\vec{T}'| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\vec{N} = (\sin t, \cos t, 0) \Rightarrow \vec{N}\Big|_{t=0} = (0, 1, 0)$

حيث $\vec{N}$ متجه وحدة الناظم الأساسي

$\vec{B}$ متجه وحدة ثنائي الناظم: $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-\cos t}{\sqrt{5}} & \frac{\sin t}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{2\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{-2\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\vec{B}\Big|_{t=0} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$$

(2)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\vec{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sqrt{5} \sin 2t \, dt = \frac{-3\sqrt{5}}{2} \left[\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(3) نعطى معادلة المستوي الماس من خلال:

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{B}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{10}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{10}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} z = 0$$

$$2x - 2y - \sqrt{2} z = 0$$

معادلة المستقيم الماس:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{-6}$$

معادلة المستقيم الناظم الأساسي عند $t = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{N}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$ ميث

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{0}$$

أو نكتب المعادلة بالشكل:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ z = 0 \end{cases}$$

④ يتقاطع المنحني مع المستوي $z=0$ عندما:

$$3\cos 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

تكون معادلة المستوي الناظم:

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{T} = 0$$

$$\vec{T}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2z = 0$$

$$x - y + 2\sqrt{2}z = 0$$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة