كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z




يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) احسب تقوس السيكلويد في نقطة ما منه حيث أن معادلة السيكلويد تعطى وسيطياً بالعلاقة:

$x = a(t - \sin t)$ ; $a \neq 0$

$y = a(1 - \cos t)$

الحل: $K = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{\frac{3}{2}}}$

$x' = a(1 - \cos t) \Rightarrow x'' = a \sin t$

$y' = a \sin t \Rightarrow y'' = a \cos t$

بالتعويض في K

$$K = \frac{|a(1-\cos t)(a\cos t) - a^2 \sin^2 t|}{|a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t|^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{|a^2(\cos t - 1)|}{|a^3(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}|} = \frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}$$

وظيفة 2) احسب تقوس الدائرة في نقطة ما منه

$x = a \cos t$

$y = a \sin t$ حيث $a \neq 0$

3) احسب تقوس التابع ونصف قطر تقوسه :

$y = a\,ch\frac{x}{a}$ و $a > 0$

وذلك من النقطة $(0, a)$ :

الحل: التقوس :

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y' = sh\frac{x}{a} \Rightarrow y'' = \frac{1}{a}ch\frac{x}{a}$$

$$y'|_{(0)} = 0 \quad , \quad y''|_{(0)} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\frac{1}{a}}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}$$

نصف قطر التقوس :

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

4) احسب تقوس المستقيم السوي.

الحل: بشكل عام معادلة المستقيم تعطى بالعلاقة : $f(x) = ax + b$

نلاحظ أن $f''(x) = 0$ بالتالي $K = 0$

وفي حالة خاصة : المستقيم الموازي للمحور oy :

$$x = a \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x'' = 0$$

$$y = t \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow K = 0$$

ملاحظة: في حالة مستقيم في الفضاء فإن معادلته تعطى بالشكل :

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at\,,\, y_0 + bt\,,\, z_0 + ct)$$

$$\vec{r}'(t) = (a\,,\, b\,,\, c)$$

$$\vec{r}''(t) = (0\,,\, 0\,,\, 0) \Rightarrow K = 0$$

5) أوجد ثلاثية مرينيه لمنحني :

$$\vec{R}(t) = (1 + t^2\,,\, t\,,\, t^3)$$

وأوجد تقوسه من النقطة $t = 1$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل

$$\vec{R}'(t) = (2t, 1, 3t^2)$$

$$|\vec{R}'(t)| = \sqrt{4t^2+1+9t^4}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}}(2t, 1, 3t^2)$$

$$\vec{R}''(t) = (2, 0, 6t)$$

$$\vec{R}' \wedge \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 1 & 3t^2 \\ 2 & 0 & 6t \end{vmatrix} = (6t, -6t^2, -2)$$

$$|\vec{R}' \wedge \vec{R}''| = \sqrt{36t^2+36t^4+4}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}' \wedge \vec{R}''}{|\vec{R}' \wedge \vec{R}''|} = \frac{1}{\sqrt{36t^2+36t^4+4}}(6t, -6t^2, -2)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{36t^2+36t^4+4}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6t & -6t^2 & -2 \\ 2t & 1 & 3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{36t^2+36t^4+4}}(2-18t^4, -18t^3-4t, 6t+12t^3)$$

$$\vec{T}\Big|_{t=1} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3)$$

$$\vec{B}\Big|_{t=1} = \frac{1}{\sqrt{76}}(6, -6, -2)$$

$$\vec{N}\Big|_{t=1} = \frac{1}{\sqrt{1064}}(-16, -22, 18)$$

التقوس:

$$K = \frac{|\vec{R}'(1) \wedge \vec{R}''(1)|}{|\vec{R}'(1)|^3}$$

$$\vec{R}'(1) = (2, 1, 3)$$

$$\vec{R}''(1) = (2, 0, 6) \qquad \vec{R}'(1) \wedge \vec{R}''(1) = (6, -6, -2)$$

$$|\vec{R}'(1) \wedge \vec{R}''(1)| = \sqrt{76}, \qquad |\vec{R}'(1)| = \sqrt{14}$$

$$K = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3}$$

انتهت الحل بحمده



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعديل على القرين 2 في المحاضرة الأولى على

أثبت أن المنحني المعطى بالعلاقة : $\vec{R}(t) = (t^3, Cost, 0)$
ليس نظامياً في النقطة $(0, 1, 0)$.

الحل

لنوجد قيمة الوسيط t الموافق للنقطة $(0, 1, 0)$ من المنحني $\vec{R}(t)$ المعطى

$t^3 = 0 \Rightarrow t = 0$

$Cost = 1 \Rightarrow t = 0$

$0 = 0$

أي الوسيط هو $t = 0$

$\vec{R}'(t) = (3t^2, -Sint, 0)$

$\vec{R}'(0) = (0, 0, 0)$

بالتالي المنحني $\vec{R}(t)$ ليس نظامياً في النقطة الموافقة للوسيط $t = 0$ أي في النقطة $(0, 1, 0)$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z