كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ٢

المحاضرة : الثالثة /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مثال: قرص دائري نصف قطره a يتحرك بحركة انسحابية، معادلات حركة القرص الدائري هي:

$$x_A = t \quad , \quad y_A = \sin t \quad , \quad z_A = \cos t$$

والمطلوب: عين مسار النقطة A ثم عين مسار نقطة ما M من محيط القرص وسرعة وتسارع النقطة M :

الحل: من معادلات الحركة نجد أن $x_A = t$ نعوضها في المعادلتين الأخيرتين.

$$\boxed{y_A^2 + z_A^2 = 1} \Leftarrow \begin{cases} y_A = \sin(x_A) \\ z_A = \cos(x_A) \end{cases}$$

المسار هو اسطوانة مقطعها دائري بالمستوي Ayz .

نختار معلم احداثيات ثابت $Oxyz$ ونختار معلم متماسك مع القرص $AXYZ$

نختار M نقطة من القرص بحيث تقع على محيط القرص وتقع على المحور AX

فتكون احداثياتها $M(a,0,0)$:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + a\vec{I} + 0\vec{J} + 0\vec{K}$$

$$\begin{cases} x_M = x_A + a = t + a \\ y_M = y_A = \sin t \\ z_M = z_A = \cos t \end{cases}$$

لتعيين مسار النقطة M نحذف الزمن من المعادلات الثلاث السابقة.

نجد $t = x_M - a$ نعوض في الأخيرتين

$$\left.\begin{array}{l} y_M = \sin(x_M - a) \\ z_M = \cos(x_M - a) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y_M^2 + z_M^2 = 1} \quad (*)$$

معادلة المسار للنقطة M تتعين في المعادلة (*) ومن احدى المعادلتين $y_M = \sin(x_M - a)$ ، $z_M = \cos(x_M - a)$ .. والمسار عبارة عن اسطوانة مقطعها دائري في المستوي $Oxyz$

تعيين سرعة النقطة M : بما أن الحركة انسحابية $\Leftarrow$ $\vec{v}(M) = \vec{v}(A)$

$$\vec{v}(M) = (\dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M) = (1, \cos t, -\sin t)$$

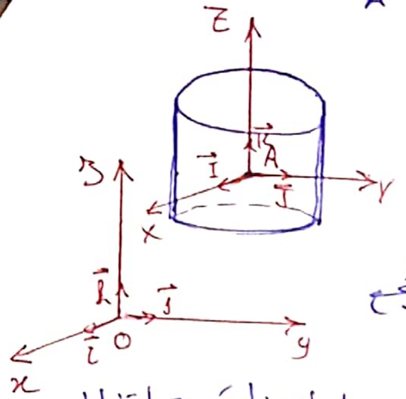
تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) \Leftarrow \text{الحركة انسحابية}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (\ddot{x}_M, \ddot{y}_M, \ddot{z}_M) = (0, -\sin t, -\cos t)$$

تمرين: لدينا جسم صلب يتحرك بحركة انسحابية. معادلة حركة الجسم هي :

$x_A = \sin t \quad , y_A = 2\cos t \quad , z_A = 1$



ولكن $\vec{AM} = (0,0,-1)$. والمطلوب :

ما هو مسار A ، مسار M ، سرعة وتسارع .

الحل : لايجاد مسار A نقوم بحذف الزمن من معادلات الحركة

$x_A = \sin t \quad , \quad \frac{1}{2} y_A = \cos t$

بالتربيع والجمع $\Longrightarrow \boxed{x_A^2 + \frac{y_A^2}{4} = 1}$ (*)

المسار يتعين من تقاطع (*) مع $z_A = 1$. فالمسار هو عبارة عن اسطوانة ناقصية ارتفاعها $z_A = 1$ مقطعها واقع في المستوي Axy

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \sin t + 0 \\ y_M &= 2\cos t + 0 \\ z_M &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{x_M^2 + \frac{y_M^2}{4} = 1} \ (**)$$

يتعين مسار النقطة M من تقاطع (**) مع $z_M = 0$ فيكون المسار عبارة عن اسطوانة ناقصية ارتفاعها $z_M = 0$ مقطعها واقع في المستوي oxy

السرعة :

$$\vec{v}(M) = \begin{cases} x'_M = \cos t \\ y'_M = -2\sin t \\ z'_M = 0 \end{cases}$$

التسارع :

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{cases} x''_M = -\sin t \\ y''_M = -2\cos t \\ z''_M = 0 \end{cases}$$

مسألة حول الحركة الدورانية حول محور ثابت :

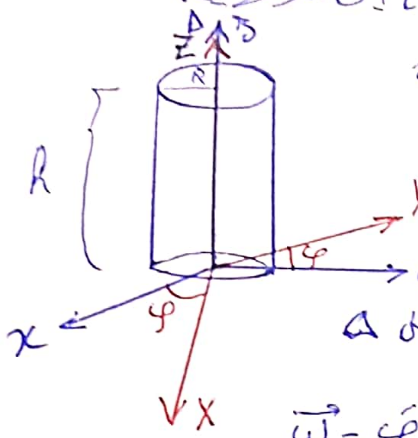
تتحرك أسطوانة دائرية نصف قطرها (R) حول محورها الثابت Δ ومعادلة حركتها:

$$\varphi = \alpha \log\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)$$

حيث α و ω_0 ثوابت ، المطلوب:

1) تعيين متجه الدوران (متجه السرعة الزاوية) ومتجه التسارع الزاوي للجسم .
2) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار الثابت R .
3) تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي .
4) تعيين القيمة العددية للسرعة والتسارع عندما تسعى t إلى اللانهاية .

الحل : من نص المسألة يتبين لنا نوع الحركة بأنها حركة دورانية حول محور ثابت .



نختار جملتين : جملة محاور ثابتة $oxyz$ تكون oz منطبق على Δ محور الدوران .
وجملة متماسكة مع الاسطوانة $OXYZ$ بحيث تكون OZ منطبق على Δ

1) تكون متجه الدوران : $\vec{\omega}=\omega\vec{K}\ ,\ \vec{K}=\vec{k}_1$

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\vec{K} \Rightarrow \vec{\omega}=\alpha\frac{\frac{\omega_0}{\alpha}}{\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)}\vec{K}=\underbrace{\frac{\omega_0}{\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)}}_{\omega=\dot{\varphi}}\vec{K}$$

متجه التسارع الزاوي :

$$\vec{\varepsilon}=\dot{\omega}\vec{K}=\ddot{\varphi}\vec{K}=\alpha\frac{-\frac{\omega_0^2}{\alpha^2}}{\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)^2}\vec{K}=\underbrace{\frac{-\omega_0^2}{\alpha\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)^2}}_{\varepsilon=\ddot{\varphi}}\vec{K}$$

بما أن متجه الدوران $\vec{\omega}$ موجب ومتجه التسارع الزاوي $\vec{\varepsilon}$ سالب فالحركة متباطئة .

2) بالنسبة لـ M نقطة اختيارية نختار M على القاعدة العلوية للاسطوانة بحيث تبعد عن المحور بمقدار R فتكون احداثيات $M(R,0,h)$ في الجملة $OXYZ$.

في الجملة المتحركة :

$$\vec{OM}=X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$$
$$\vec{OM}=R\vec{I}+h\vec{K}$$

$$\vec{v}(M)=\vec{\omega}\wedge\vec{OM}=\begin{vmatrix}\vec{I} & \vec{J} & \vec{K}\\ 0 & 0 & \omega\\ R & 0 & h\end{vmatrix}=R\omega\vec{J}=R\frac{\omega_0}{\left(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t\right)}\vec{J}$$

وهو متجه السرعة في الجملة المتحركة .

وتكون القيمة العددية له :

$$|\vec{v}(M)|=\sqrt{R^2\omega^2}=R\omega$$

أما التسارع :

$$\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M)=\begin{vmatrix}\vec{I}&\vec{J}&\vec{K}\\0&0&\varepsilon\\R&0&h\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{I}&\vec{J}&\vec{K}\\0&0&\omega\\0&R\omega&0\end{vmatrix}=R\varepsilon\vec{J}-R\omega^2\vec{I}$$

$$\vec{\Gamma}(M)=-R\omega^2\vec{I}+R\varepsilon\vec{J}$$

فيكون شعاع التسارع الناظمي $\vec{\Gamma}_N(M)=-R\omega^2\vec{I}$

شعاع التسارع المماسي : $\vec{\Gamma}_T(M)=R\varepsilon\vec{J}$

وتكون القيمة العددية لكلا التسارعين :

$$|\vec{\Gamma}_N(M)|=\omega^2 R \quad , \quad |\vec{\Gamma}_T(M)|=\varepsilon R$$

$$|\vec{\Gamma}(M)|=\sqrt{(-R\omega^2)^2+(R\varepsilon)^2}=\sqrt{R^2\omega^4+R^2\varepsilon^2}=R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$$

وهي القيمة العددية للتسارع الكلي .

في الحلقة الثابتة : مباشرة $\vec{OM}=R\vec{I}+h\vec{K}$ في الحلقة المتماسكة مع الاسطوانة (المتحركة)

ننتقل إلى الحلقة الثابتة بالإسقاط على الحلقة الثابتة $Oxyz$

$$\vec{I}=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j} \quad , \quad \vec{K}=\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{OM}=R(\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j})+h\,\vec{k}_1$$

وهنا يوجد طريقتين لايجاد السرعة :

طريقة أولى : نشتق مباشرة الشعاع $\vec{OM}$:

$$\vec{OM}=\begin{cases}x=R\cos\varphi\\y=R\sin\varphi\\z=h\end{cases}$$

$$\vec{v}(M)=\begin{cases}\dot{x}=-\dot{\varphi}R\sin\varphi=-R\omega\sin\varphi\\\dot{y}=\dot{\varphi}R\cos\varphi=R\omega\cos\varphi\\\dot{z}=0\end{cases}$$

فيكون متجه السرعة :

$$\vec{v}(M)=(-R\omega\sin\varphi)\vec{i}+(R\omega\cos\varphi)\vec{j}$$

وتكون القيمة العددية للسرعة : $|\vec{v}(M)|=\sqrt{R^2\omega^2\sin^2\varphi+R^2\omega^2\cos^2\varphi}=\omega R$

طريقة ثانية : ايجاد السرعة بتطبيق القانون :

$$\vec{v}(M)=\vec{\omega}\wedge\vec{OM}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\R\cos\varphi&R\sin\varphi&h\end{vmatrix}=(-R\omega\sin\varphi)\vec{i}+(R\omega\cos\varphi)\vec{j}$$

وهي تمثل عبارة متجه السرعة في الحلقة الثابتة (نفس النتيجة التي حصلنا عليها في الطريقة الأولى)

لايجاد التسارع في الحلقة الثابتة يوجد طريقتين :

طريقة الأولى :

نشتق مباشرة متجه السرعة :

$$\vec{v}(M)=-R\omega\sin\varphi\,\vec{i}+R\omega\cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{cases} x'' = -R\dot{\omega}\sin\varphi - R\omega\dot{\varphi}\cos\varphi = -R\varepsilon\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi \\ y'' = R\varepsilon\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi \\ z'' = 0 \end{cases}$$

شعاع التسارع :

$$\vec{\Gamma}(M) = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-R\varepsilon\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi)\vec{i} + (R\varepsilon\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi)\vec{j}$$

<u>الطريقة الثانية</u> : باستخدام القانون :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega\sin\varphi & R\omega\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-R\varepsilon\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi)\vec{i} + (R\varepsilon\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi)\vec{j}$$

وهي عبارة شعاع التسارع في الحالة الثانية .

التسارع المماسي : $\vec{\Gamma}_T(M) = -R\varepsilon\sin\varphi\,\vec{i} + R\varepsilon\cos\varphi\,\vec{j}$

التسارع الناظمي : $\vec{\Gamma}_N(M) = -R\omega^2\cos\varphi\,\vec{i} - R\omega^2\sin\varphi\,\vec{j}$

$$|\vec{\Gamma}_T(M)| = \sqrt{R^2\varepsilon^2\sin^2\varphi + R^2\varepsilon^2\cos^2\varphi} = \varepsilon R$$

$$|\vec{\Gamma}_N(M)| = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\varphi + R^2\omega^4\sin^2\varphi} = R\omega^2$$

حساب التسارع الكلي (القيمة العددية) :

$$|\vec{\Gamma}(M)|^2 = |\vec{\Gamma}_T(M)|^2 + |\vec{\Gamma}_N(M)|^2$$

$$= (-R\varepsilon\sin\varphi\,\vec{i} + R\varepsilon\cos\varphi\,\vec{j})^2 + (-R\omega^2\cos\varphi\,\vec{i} - R\omega^2\sin\varphi\,\vec{j})^2$$

$$= [R^2\varepsilon^2\sin^2\varphi\,\vec{i}^2 - \underbrace{2R^2\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{i}\cdot\vec{j}}_{=0} + R^2\varepsilon^2\cos^2\varphi\,\vec{j}^2] + [R^2\omega^4\cos^2\varphi\,(\vec{i})^2$$

$$+ \underbrace{2R^2\omega^4\cos\varphi\sin\varphi\,\vec{i}\cdot\vec{j}}_{=0} + R^2\omega^4\sin^2\varphi\,\vec{j}^2]$$

بما أن $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{j}^2 = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$

$$|\vec{\Gamma}(M)|^2 = R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4 \Rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

(4

$$|\vec{v}(M)| = R\omega = R\frac{\alpha\omega_0}{\alpha + \omega_0 t} \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ \omega\to 0}]{} 0$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = R\sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0}{(\alpha+\omega_0 t)}\right)^4 + \left(\frac{\alpha\omega_0^2}{(\alpha+\omega_0 t)^2}\right)^2} \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ \omega\to 0}]{} 0$$

الحركة متباطئة إلى أن تنعدم السرعة والتسارع (تتوقف) .

مسألة محلولة على الحركة الدورانية حول محور منزلق :

تدور اسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $\omega = 2$ وينسحب محورها على حاملا بسرعة منتظمة قيمتها $v = 6$ والمطلوب :

تعيين الخطوة المختزلة للحركة اللولبية للاسطوانة ثم تعيين موضع، مسار، وسرعة وتسارع نقطة من الاسطوانة احداثياتها بالنسبة لمحاور متماسكة مع الاسطوانة هي $(2,2,3)$

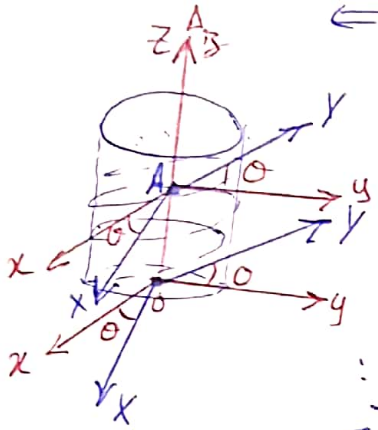
الحل: واضح من نص المسألة ان الاسطوانة تدور حول محورها بسرعة ثابتة وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة فالحركة لولبية منتظمة فلها وسيط حركة واحد هو φ .

معادلة حركة الاسطوانة : $\dot{\varphi} = \omega = 2$

$$\overset{\text{بالتكامل}}{\Longrightarrow} \varphi = \int \omega\, dt = 2t + \varphi_0$$

في بداية الحركة وقبل انسحاب الاسطوانة على محورها نفرض ان الجملتين منطبقتين أي ان

شروط البدء : $t = 0$ كانت $\varphi = 0 \Leftarrow \varphi_0 = 0 \Leftarrow$



معادلة الحركة $\boxed{\varphi = 2t}$

$$z_A = b\varphi \Rightarrow v = \dot{z} = b\dot{\varphi} = 2b$$

$$6 = 2b \Rightarrow \boxed{b = 3}$$ وهي الخطوة المختزلة اللولب $\Rightarrow z_A = 3\varphi$ ، $z_A = 6t$

تعيين موضع النقطة M :

لتكن M نقطة من الاسطوانة احداثياتها في الجملة المتحركة $(2,2,3)$:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = z_A \vec{K} + X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\vec{OM} = 6t\vec{K} + 2\vec{I} + 2\vec{J} + 3\vec{K} = 2\vec{I} + 2\vec{J} + (6t+3)\vec{K} \quad (1)$$

$$\vec{OM} = 2(\cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}) + 2(-\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j}) + (3+6t)\vec{k} \ ; \vec{k} = \vec{K} \quad (2)$$

(1) تمثل موضع M في الجملة المتحركة .

(2) تمثل موضع M في الجملة الثابتة بعد تعويض $\varphi = 2t$ والترتيب .

لايجاد مسار النقطة M :

باسقاط العلاقة (2) على المحاور الثابتة :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = 2\cos\varphi - 2\sin\varphi \\ y = 2\sin\varphi + 2\cos\varphi \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

بتعويض $\varphi = 2t$ نحصل على معادلات حركة النقطة M :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x = 2\cos(2t) - 2\sin(2t) & (3) \\ y = 2\sin(2t) + 2\cos(2t) & (4) \\ z = 3 + 6t & (5) \end{cases}$$

لايجاد معادلات المسار نحذف الزمن t من (3)،(4) و (5)

نربع (3) و (4) ونجمع :

$$x^2+y^2=(2(\cos(2t)-\sin(2t)))^2+(2(\sin(2t)+\cos(2t)))^2$$

$$=4\cos^2 2t-8\cos(2t)\sin(2t)+4\sin^2(2t)+4\sin^2(2t)+8\sin(2t)\cos(2t)$$

$$+4\cos^2(2t)=4\cos^2 2t+4\sin^2 2t+4\sin^2(2t)+4\cos^2 2t$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2=8} \quad (6)$$

وهي معادلة سطح اسطوانة نصف قطرها $2\sqrt{2}$ ومحورها Oz .

من (5) نجد $t=\frac{z-3}{6}$ نعوضها في (3) أو (4) فنجد :

$$\boxed{x=2\cos\left(\frac{z-3}{3}\right)-2\sin\left(\frac{z-3}{3}\right)} \quad (7)$$

إن المعادلتين (6) و (7) هما معادلتا المسار للنقطة M وهو منحنى لولبي يرتسم على سطح الاسطوانة.

<u>تعيين سرعة M</u> : <u>في الجملة المتحركة</u>

$$\vec{V}(M)=z'_A\vec{K}+\vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

$$=b\varphi'\vec{K}+\begin{vmatrix}\vec{I}&\vec{J}&\vec{K}\\0&0&2\\2&2&6t+3\end{vmatrix}=6\vec{K}-4\vec{I}+4\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M)=(-4,4,6)\Rightarrow|\vec{V}(M)|=\sqrt{16+16+36}=\sqrt{68}$$

<u>في الجملة الثابتة</u> : نشتق مباشرة مركبات النقطة M في (3)، (4)، (5)

$$\begin{cases}x'=-4\sin(2t)-4\cos(2t)\\y'=4\cos(2t)-4\sin(2t)\\z'=6\end{cases}$$

<u>تعيين تسارع M</u> : <u>في الجملة المتحركة</u> (المتحركة):

$$\vec{\Gamma}(M)=z''\vec{K}+\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{\omega}\wedge\vec{V}(M)=\underbrace{b\varphi''\vec{K}}_{0}+\underbrace{\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}}_{=0}+\begin{vmatrix}\vec{I}&\vec{J}&\vec{K}\\0&0&2\\-4&4&6\end{vmatrix} \qquad \vec{\varepsilon}=0$$

$$\vec{\Gamma}(M)=-8\vec{I}-8\vec{J}\Rightarrow\vec{\Gamma}(M)=(-8,-8,0)$$

<u>في الجملة الثابتة</u> : نشتق مركبات سرعة النقطة M فنجد:

$$\begin{cases}x''=-8\cos(2t)+8\sin(2t)\\y''=-8\sin(2t)-8\cos(2t)\\z''=0\end{cases}$$

وهي مركبات التسارع في الجملة الثابتة للنقطة M ولايجاد القيمة العددية

$$|\vec{\Gamma}(M)|=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$$