كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

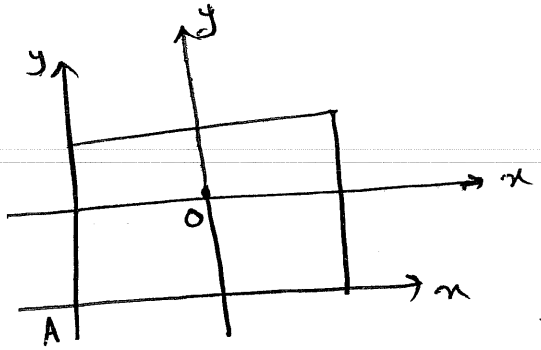
Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

السؤال الأول : اوجد عزم عطالة سطح مستطيل طوله a وعرضه b بالنسبة لمحور التناظرين ثم بالنسبة لضلعين متجاورين فيه من اضلاعه



ليكن O مركز تناظر المستطيل وليكن ox و oy المحورين التناظرين له فيكون

$$I_x = \int y^2 dm \; ; \; dm = \rho dx dy$$

$$I_x = \int_S y^2 \rho dx dy = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \rho [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{\rho a b^3}{12} = \frac{M b^2}{12} \; ; \; M = \rho ab$$

$$I_y = \int_S x^2 dm = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{\rho a^3 b}{12} = \frac{M a^2}{12}$$

أما لحساب عزم العطالة بالنسبة لضلعين من اضلاعه منطبقة عليهما المحورين Ax و Ay ويكون

$$I_{Ax} = \int_S y^2 dm = \rho \int_S y^2 dx dy = \rho \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{a b^3 \rho}{3} = \frac{M b^2}{3}$$

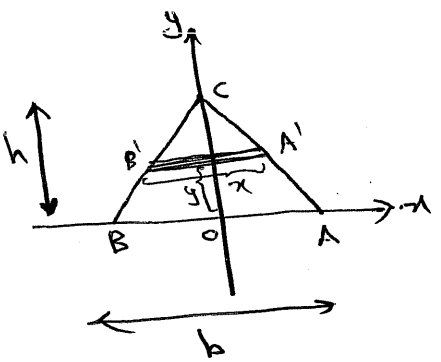
وكذلك :

$$I_{Ay} = \int_S x^2 dm = \rho \int x^2 dx dy = \rho \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{\rho b a^3}{3} = \frac{M a^2}{3}$$

(يمكن حساب I_{Ax} و I_{Ay} عن طريق نظرية هويغنز)

السؤال الثاني : اوجد عزم عطالة سطح مثلث طول قاعدته b وارتفاعه h وذلك بالنسبة لمستقيم منطبق على القاعدة ثم بالنسبة لمستقيم مار بالرأس المقابل وموازٍ للقاعدة.

الحل : لنأخذ المثلث ABC ولنأخذ المحور ox منطبقاً على القاعدة AB ولنأخذ المحور oy عمودياً على ox ومارّاً من الرأس ولنقسم الرأس إلى شرائح موازية للمحور ox وبعد إحداثيها عن ox هو y وسماكتها dy وطولها x فيكون $dm = \rho x dy$



$$I_x = \int y^2 dm = \rho \int y^2 x\, dy$$

من تشابه المثلثات ABC و A'B'C

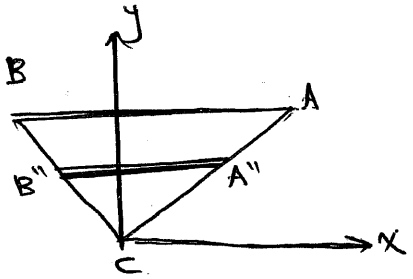
$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$\Rightarrow I_x = \rho \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)\, dy = \frac{\rho b}{h} \int_0^h (y^2 h - y^3)\, dy = \frac{\rho b}{h}\left[\frac{y^3 h}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

$$= \frac{\rho b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\rho b h^3}{12} = \frac{M h^2}{6} \; ; \; M = \frac{\rho b h}{2}$$

* لنأخذ محور مواز للقاعدة وسميه cx ونأخذ محوراً عامودياً على القاعدة وليكن cy ولنقسم المثلث إلى شرائح بعدها عن cx هو y طولها x وسماكتها dy فيكون

$$I_{cx} = \int y^2 dm = \rho \int y^2 x\, dy$$



من تشابه ABC و A"B"C

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h} y$$

$$\Rightarrow I_{cx} = \rho \int_0^h y^3 \frac{b}{h}\, dy = \frac{\rho b}{h} \int_0^h y^3 dy$$

$$= \frac{\rho b h^3}{4} \; ; \; M = \frac{1}{2}\rho b h$$

يمكن حل الطلب الثاني حسب نظرية هويغنز $I_{c\Delta} = I_{ox} - Md^2$

حيث $c\Delta$ يوازي ox ويمر من مركز الثقل c

$$I_{c\Delta} = \frac{M h^2}{6} - \frac{M h^2}{9} = \frac{1}{18} M h^2$$

إذا عزم العطالة بالنسبة لمحور مار من الرأس ويوازي القاعدة

$$I_{\Delta''} = I_{c\Delta} + Md^2 = \frac{M h^2}{18} + M\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{M h^2}{2}.$$

السؤال الثالث :

اوجد عزم عطالة سطح كرة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها . ثم لقطرها ثم بالنسبة لمستوييها القطري

الحل : ليكن $Oxyz$ ثلاثية متعامدة مركزها مركز الكرة ولحساب عزم عطالتها حول مركزها O

$$I_o = \int r^2 dm$$

إذا جزأنا السطح إلى اجزاء صغيرة كل جزء عن O هو R ($r=R$) وكتلة dm

$$I_o = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M \quad ; M = \rho 4\pi R^2$$

* عزم عطالتها حول قطرها (نعلم ان عزوم عطالتها حول جميع اقطارها متساوية بسبب التناظر)

$$I_x = I_y = I_z \Rightarrow I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{3}{2} I_x$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{3} M R^2$$

* عزم عطالتها حول مستوياتها القطرية متساوية بسبب التناظر إذاً

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx}$$

$$\Rightarrow I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = 3 I_{xy}$$

$$\Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_o = \frac{M R^2}{3}$$

(يمكن استخدام $I_x = I_{xy} + I_{xz} = 2 I_{xy} \Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{2} I_x = \frac{M R^2}{3}$)

السؤال الرابع : اوجد عزم عطالة جسم على شكل كرة متجانسة صماء نصف قطرها R

① بالنسبة لمركزها ② بالنسبة لقطرها ③ بالنسبة لمستو مطرح لها.

الحل : لنجزئ الكرة إلى قشرات كروية نصف قطر إحداها r وسماكتها dr

فيكون حجم هذه القشرة عن O هو r وكتلتها $dm = \rho 4\pi r^2 dr$

$$I_o = \int r^2 dm = \rho \int_0^R 4\pi r^2 dr\, r^2 = \rho \frac{4}{5} \pi R^5$$

ولكن كتلة الكرة $M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ ومنه $I_o = \frac{3}{5} M R^2$

② بسبب التناظر لدينا $I_x = I_y = I_3$

$$\Rightarrow I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_3) = \frac{3}{2} I_x \Rightarrow I_x = \frac{2}{3} I_o = \frac{2}{5} MR^2$$

③ - اما عزم عطالتها بالنسبة لمستوي قطري فيها يساوي عزم عطالتها بالنسبة لأي من المستويات الإحداثية وذلك بسبب التناظر

$$I_{xy} = I_{y3} = I_{3x}$$

$$\Rightarrow I_o = I_{xy} + I_{y3} + I_{3x} = 3I_{xy} \Rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_o = \frac{MR^2}{5}$$

طريقة اخرى :

$$I_{xy} = \iiint 3^2 dm \; ; \; dm = \rho r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \; ; \; 3 = r\cos\theta$$

$$I_{xy} = \iiint r^2\cos^2\theta \, \rho \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \; ; \; 0 < r < R \; , 0 < \theta < \pi$$

$$= 2\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, .$$

$$= 2\rho \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi]_0^{2\pi} = 2\rho \frac{R^5}{5} \frac{1}{3} 2\pi = \frac{4\pi\rho R^5}{3 \cdot 5}$$

$$= \frac{MR^2}{5} \; ; \; M = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

ملاحظة : بالاحداثيات الكروية :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \, , \; y = r\sin\theta\sin\varphi \, , \; 3 = r\cos\theta$$

$$\text{و} \quad 0 \le r \le R \, , \; 0 \le \theta \le \pi \, , \; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

مكتبة A to Z