كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

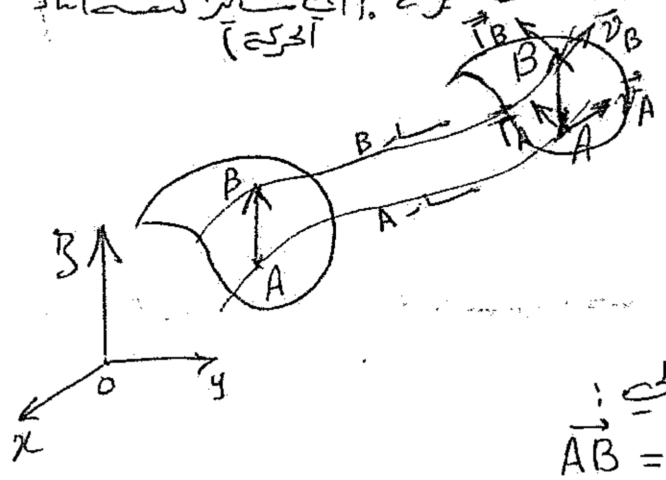
المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

أ- الحركة الانسحابية (الانتقالية) للجسم الصلب.

تعريف: نقول عن الجسم الصلب بأنه يتحرك حركة انسحابية إذا بقي أي متجه يصل بين أي نقطتين من نقاط هذا الجسم موازياً لنفسه أثناء الحركة. (أي سايراً لنفسه أثناء الحركة)



لتكن A و B نقطتين من جسم يتحرك حركة انسحابية فيكون:

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{C}} \qquad (1)$$

حيث $\vec{C}$ متجه ثابت بالطول والمنحى.

الدراسة السينماتية للحركة:

لتكن A و B نقطتان من الجسم الصلب وبالتالي:

$$\vec{AB} = \vec{C} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{C}$$
$$\Rightarrow \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{C}$$

وهذا يعني أن لتعيين موضع النقطة B يكفي معرفة موضع النقطة A وأن مسار أي نقطة B ينتج من مسار النقطة A بإسحاب قدره المتجه $\vec{C}$ (ثابت)

- أي أن: مسارات جميع نقاط الجسم تنتج عن بعضها البعض. لمعرفة جميع المسارات يكفي معرفة مسار إحداها ولتكن مسار النقطة A.

وبالتالي حركة جميع النقاط تتعين بمعرفة حركة احداها. ولمعرفة حركة احداها يلزمنا ثلاث معادلات حركة هي احداثيات هذه النقطة.

- إن عدد درجات حرية جسم صلب يتحرك بحركة انسحابية هو ثلاث (لأن عدد درجات حرية الجسم الصلب الطليق هو ست درجات وعدد علاقات الارتباط 3 (وهي قيدنا منحى كل متجه 3) فيبقى للجسم الصلب 3 درجات حرية.

- إذاً تتعين حركة الجسم الانسحابية بثلاث معادلات حركة:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= x(t) \\ y_A &= y(t) \\ z_A &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

ملاحظة: تعد الحركة الانسحابية من أبسط الحركات لأنها تعاد إلى دراسة حركة نقطة مادية.

مثال: مثال على الحركة الانسحابية كحركة المصاعد والسلالم المتحركة.

دراسة السرعة :

لتعيين سرعة نقاط الجسم نشتق العلاقة الأخيرة

$$\vec{v}(B) = \frac{d\vec{OB}}{dt} = \frac{d\vec{OA}}{dt} + \frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d\vec{OA}}{dt} + \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(B) = \vec{v}(A)} \quad (2)$$

أي أن متجهات سرعة جميع نقاط الجسم الصلب متساوية في كل لحظة عندما يتحرك الجسم حركة انسحابية وهي صفة مميزة للحركة الانسحابية : أي أنه لو تحركت أي مجموعة مادية بحيث تكون متجهات سرعة جميع نقاطها متساوية في كل لحظة كانت المجموعة تؤلف جسماً صلباً يتحرك حركة انسحابية .

البرهان : لدينا من الفرض $\vec{v}(B) = \vec{v}(A)$ في كل لحظة

بالمكاملة نجد أن : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{c} \Rightarrow \boxed{\vec{AB} = \vec{c}}$$

وهذا يعني أن طويلة المتجه $\vec{AB}$ ثابت أي أن الجسم صلب ويدل على أن معنى المتجه $\vec{AB}$ ثابت أي أن الحركة هي حركة انسحابية .

دراسة التسارع :

لتعيين تسارع نقاط الجسم الصلب نشتق العلاقة (2) :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A)} \quad (3)$$

أي أن متجهات تسارعات جميع نقاط الجسم الصلب الذي يتحرك حركة انسحابية متساوية في كل لحظة . وهي صفة (خاصة) غير مميزة أي أنه لو تحركت مجموعة مادية بحيث تكون متجهات تسارع جميع نقاطها متساوية في كل لحظة ليس بالضرورة المجموعة تؤلف جسماً صلباً يتحرك حركة انسحابية :

البرهان : لدينا : $\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A)$

حيث $\vec{K}$ ثابت التكامل : $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{K} \Longleftarrow$ بالمكاملة

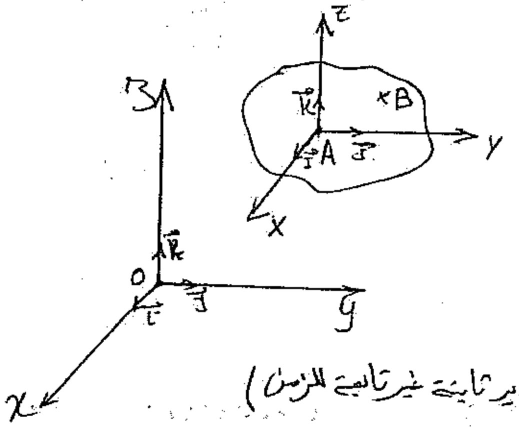
$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{K}t + \vec{c} \Longleftarrow$ بالمكاملة

$\vec{AB} = \vec{K}t + \vec{c}$

وبالتالي المجموعة لا تشكل جسماً صلباً يتحرك حركة انسحابية إلا إذا كان $\vec{K} = \vec{0}$
($\vec{K} = 0$ تشكل جسماً صلباً وبالتالي $\vec{v}(B) = \vec{v}(A)$ فالحركة انسحابية).
وبالتالي هذه الصفة غير مميزة .

الدراسة التحليلية للجسم الصلب المتحرك بحركة انسحابية :

الدراسة التحليلية تعني اسقاط العلاقات المتجهية (الشعاعية) على المحاور الاحداثية .



لنختار : $oxyz$ جملة محاور احداثية ثابتة

و $AXYZ$ جملة محاور احداثية متماسكة مع الجسم الصلب

والموازية لجملة المحاور الثابتة $oxyz$

حيث احداثيات $A(x_A, y_A, z_A)$ واحداثيات $B(x_B, y_B, z_B)$

لنأخذ العلاقة (1) : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

حيث أن : $\vec{AB} = \vec{C}(a,b,c)$ (a, b, c مقادير ثابتة غير تابعة للزمن)

بالاسقاط على المحاور الاحداثية :

$$\vec{OB} = \begin{cases} x_B = x_A + a \\ y_B = y_A + b \\ z_B = z_A + c \end{cases}$$

تمثل العلاقات : $x_A = x(t)$, $y_A = y(t)$, $z_A = z(t)$ معادلات الحركة

وبالتالي المعادلات الوسيطية لمسار حركة B هي :

$$\vec{OB} = \begin{cases} x_B = x_A(t) + a \\ y_B = y_A(t) + b \\ z_B = z_A(t) + c \end{cases}$$

أي أن مسار النقطة B ينتج عن مسار النقطة A بانسحاب مقداره $\vec{AB} = (a,b,c)$

ومسارات جميع النقاط تنتج عن بعضها البعض بانسحاب .

تعيين السرعة :

بالاشتقاق (لـ $\vec{OB}$) نحصل على متجه سرعة B في الجملة الثابتة :

$$\vec{v}(B) = \begin{cases} x'_B = x'_A(t) \\ y'_B = y'_A(t) \\ z'_B = z'_A(t) \end{cases}$$

أي أن متجهات السرعة متساوية $\vec{v}(B) = \vec{v}(A)$.

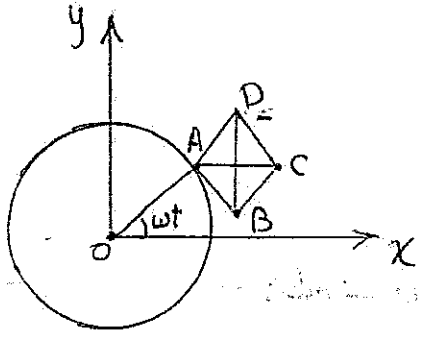
تعيين التسارعات :

بالاشتقاق مرة أخرى لمركبات متجه السرعة :

$$\vec{\Gamma}(B) = \begin{cases} x''_B = x''_A(t) \\ y''_B = y''_A(t) \\ z''_B = z''_A(t) \end{cases}$$

أي أن متجهات التسارعات متساوية : $\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A)$

مثال : $ABCD$ صفيحة مربعة طول ضلعها a تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن رأسها A يرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها R بسرعة زاوية ثابتة ω والمطلوب أوجد مسار حركة النقطة C (المقابلة قطرياً للرأس A) علماً أنه في اللحظة $t=0$ كان A و C على المحور OX .



الحل :

بما أن الحركة انسحابية فإن : دوماً $\vec{AC} = a\sqrt{2}\,\vec{i}$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

بالإسقاط :

$$x_C = x_A + a\sqrt{2}$$
$$y_C = y_A$$

لدينا :

$$x_A = R\cos\omega t$$
$$y_A = R\sin\omega t$$

وبالتالي :

$$\vec{OC} : \begin{cases} x_C = R\cos\omega t + a\sqrt{2} \\ y_C = R\sin\omega t \end{cases}$$

وهي تمثل المعادلات الوسيطية لمسار النقطة C :

بحذف الزمن نحصل على :

$$\boxed{(x_C - a\sqrt{2})^2 + y_C^2 = R^2}$$

معادلة مسار حركة النقطة C وهي تمثل دائرة مركزها $(a\sqrt{2}, 0)$ ونصف قطرها R .