كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

حركة الجسم الصلب

سندرس في هذا الفصل الخواص الهندسية للحركة دون التعرض للمسببات. عند دراسة حركة النقطة مادية في المقرر (ميكانيك 1) تم تعيين درجات الحرية وهنا سنعين درجات حرية الجسم بدلالة الزمن فنحصل على معادلات الحركة.

تعريف الجسم الصلب:

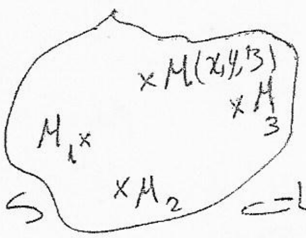
هو عبارة عن مجموعة من النقاط المادية التي تحافظ على الأبعاد المتبادلة فيما بينها مع تغير الزمن بمعنى آخر: البعد بين أي نقطتين من هذا الجسم يكون ثابتاً مهما تغير الزمن ومهما تحرك الجسم.

ملاحظة:

الجسم الصلب يحوي عدد لانهائي من النقاط المادية بينما المجموعة المادية المتماسكة هي مجموعة محدود من النقاط المادية تحافظ على الأبعاد المتبادلة فيما بينها مع تغير الزمن.

تعيين موضع الجسم الصلب:

لتعيين موضع جسم صلب يجب أن نعين موضع كل نقطة من نقاطه في لحظة ما من الزمن بالنسبة لجملة احداثيات معينة. ولكن إذا كان عدد هذه النقاط غير منتهي (أي يحوي الجسم عدد كبير من النقاط) فإنه يتعذر علينا ايجاد موضع كل نقطة منه لذلك نلجأ إلى التعريف الرياضي للجسم الصلب وذلك بمعرفة موضع ثلاث نقاط من الجسم الصلب غير واقعة على استقامة واحدة كما يلي:



إن موضع نقطة واحدة ولتكن $M \in S$ من الجسم الصلب يتعين إذا عرفت ثلاث احداثيات. أي نحتاج إلى ثلاث علاقات مستقلة لتعيين هذه الاحداثيات (x,y,z).

نحصل على هذه العلاقات الثلاثة من علاقات البعد بين النقطة M والنقاط الثلاث M_1, M_2, M_3 (هذه النقاط الثلاث معلومة). (وحسب تعريف الجسم الصلب) نكتب:

$$|\overline{M_1 M}| = C_1 \quad , \quad |\overline{M_2 M}| = C_2 \quad , \quad |\overline{M_3 M}| = C_3$$

(C_1, C_2, C_3 ثوابت)

ومن قانون المسافة بين نقطتين ينتج لدينا علاقات الارتباط (الأبعاد) التالية:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=C_1^2$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=C_2^2$$
$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2=C_3^2$$

علماً أن: $M(x,y,z)$ ، $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $M_3(x_3,y_3,z_3)$

بحل المعادلات السابقة تتعين (x,y,z) موضع النقطة M.

درجة حرية نقطة مادية :

هي عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع هذه النقطة أو عدد الاتجاهات التي يمكن للنقطة أن تتحرك بها .

مثلاً : النقطة المادية الطليقة في الفضاء الثلاثي تتعين بثلاث إحداثيات فإننا نقول أن لها ثلاث درجات حرية ، أي أن هذه النقطة تملك حرية الحركة في أي من الاتجاهات الثلاثة في الفضاء ،

أما إذا قُيدت النقطة فإن درجة حريتها تنقص بعدد العلاقات التي تعبر عن القيد فمثلاً إذا كانت النقطة تتحرك على سطح تصبح درجة حريتها 2 (لأن السطح معادلة ارتباط واحدة تربط بينه وبين النقطة) ، بينما إذا كانت النقطة تتحرك على منحني (المنحني في الفضاء يعطى بتقاطع سطحين) عندها يكون للنقطة درجة حرية واحدة لأن المنحني يتعين بعلاقتي ارتباط .

درجة حرية جسم صلب :

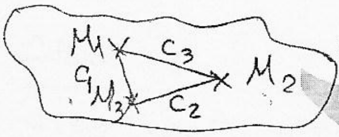
هي عبارة عن عدد الوسطاء المستقلة التي تعين بشكل وحيد وكافي موضع الجسم الصلب ونكتب :

عدد درجات حرية الجسم الصلب = عدد الوسطاء التي تعين الجسم الصلب - عدد العلاقات التي تعين هذه الوسطاء .

ملاحظة : عدد درجات الحرية تنقص عند تقييد الجسم الصلب .

درجة حرية الجسم الصلب الطليق في الفضاء :

إن موضع الجسم الصلب الطليق يتعين إذا علمنا موضع ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة كما سبق وذكرنا ، حيث أنه لكل نقطة ثلاث مركبات وبالتالي لدينا (9) وسطاء .



$M_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $M_3(x_3,y_3,z_3)$

لكن هذه الوسطاء ليست مستقلة وذلك لأنها مرتبطة بثلاث علاقات هي علاقة الأبعاد الثابتة المتبادلة بين النقط الثلاث وبالتالي يكون :

عدد درجات الحرية = عدد الوسطاء غير المستقلة - عدد علاقات الارتباط

$$9 - 3 = 6$$

عدد الوسطاء غير المستقلة لوجود علاقة ارتباط

علاقات الارتباط وهي علاقة البعد بين النقاط .

عدد الوسطاء المستقلة (عدد درجات الحرية)

أي أن للجسم الصلب الطليق 6 درجات حرية ($|\overrightarrow{M_1M_2}| = c_3$ ، $|\overrightarrow{M_2M_3}| = c_2$ ، $|\overrightarrow{M_1M_3}| = c_1$)

مثال (1):

عدد درجات حرية نقطة متحركة على سطح جسم صلب:

النقطة $M(x,y,z)$

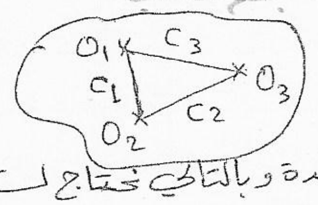
$$9 + 3 - 3 - 1 = 8$$

عدد الوسطاء غير المستقلة لوجود علاقة ارتباط — احداثيات النقطة — علاقات ارتباط الجسم — علاقة ارتباط النقطة بمعادلة السطح — عدد الوسطاء المستقلة أو عدد درجات الحرية

مثال (2):

قيد النقطة — قيد الجسم الصلب

درجة حرية جسم صلب ثُبتت فيه نقطة O_1:



يكفي لتعيين موضع الجسم في هذه الحالة معرفة موضع نقطتين O_2 ، O_3 غير واقعتين مع O_1 على استقامة واحدة وبالتالي نحتاج لستة وسطاء مرتبطة بثلاث علاقات هي علاقات الأبعاد الثلاثة وهي:

$$|\overline{O_1O_2}| = C_1$$
$$|\overline{O_2O_3}| = C_2$$
$$|\overline{O_1O_3}| = C_3$$

وبالتالي تكون عدد درجات الحرية = عدد الوسطاء − عدد علاقات الارتباط

$$6 - 3 = 3$$

وسطاء غير مستقلة — علاقات الارتباط — درجات الحرية (وسطاء مستقلة)

نقطتين بـ 3 إحداثيات

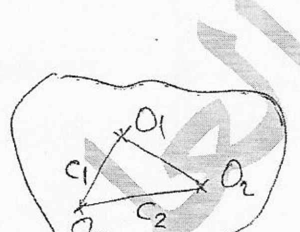
ملاحظة:

النقطة O_1 معلومة من نص المثال لذلك نهمل وسطاءها.

نستنتج أن: للجسم الصلب المقيد بنقطة واحدة له ثلاث درجات حرية ومثال على ذلك الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة سنأخذها لاحقاً نسميها زوايا أولر.

مثال (3):

درجة حرية جسم صلب ثبتت فيه نقطتين O_1 و O_2



يكفي لتعيين موضع الجسم معرفة نقطة واحدة ولتكن O_3

ولكن احداثيات O_3 هي ثلاثة مرتبطة بعلاقتين هما البعد بين O_1 و O_3 والبعد بين O_2 ، O_3 أي:

$$|\overline{O_1O_3}| = C_1 \quad \text{و} \quad |\overline{O_2O_3}| = C_2$$

وبالتالي تكون: عدد درجات الحرية = عدد الوسطاء − عدد علاقات الارتباط

$$3 - 2 = 1$$

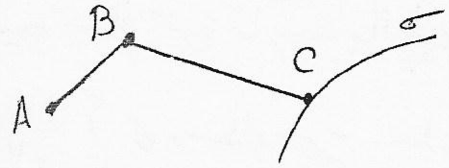
وسطاء غير مستقلة — علاقتي البعد — درجة حرية وحيدة

نستنتج أن: الجسم الصلب المقيد بنقطتين له درجة حرية واحدة.

ومثال على ذلك الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت.

مثال (4) :

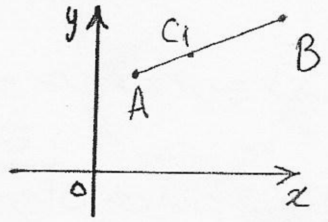
عدد درجات حرية قضيبين متصلين إحداهما يتحرك على منحني :



$$\underbrace{9}_{\text{احداثيات النقاط A و B و C التي تعين القضيبين}} - \underbrace{1}_{\text{البعد بين A و B}} - \underbrace{1}_{\text{البعد بين B و C}} - \underbrace{2}_{\text{معادلتي المنحني التي يرتبط بها C}} = \underbrace{5}_{\text{عدد درجات الحرية}}$$

مثال (5) :

عدد درجات حرية جسم صلب مؤلف من قضيب ملازم لمستوٍ ثابت ونقطة مادية ملازمة للقضيب :



إن القضيب يتعين في المستوي بأربعة وسطاء هي احداثيات نقطتين منه وترتبط هذه الوسطاء بعلاقة البعدين النقطتين فيكون للقضيب ثلاث درجات حرية

$$4 - \underbrace{1}_{\text{علاقة البعد بين A و B}} = 3$$

ونعلم أن النقطة C_1 التي تلازم القضيب درجة حرية واحدة لذا يكون للجسم الصلب أربع درجات حرية :

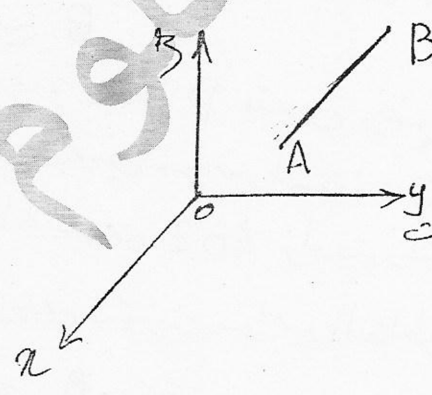
$$\underbrace{3}_{\text{درجة حرية القضيب بالمستوي}} + \underbrace{1}_{\text{درجة حرية نقطة } C_1 \text{ على القضيب}} = \underbrace{4}_{\text{درجات الحرية}}$$

طريقة أخرى : نأخذ جميع الوسطاء للنقاط B و A و C_1 فيكون لدينا 6 وسطاء نطرح منها علاقتي ارتباط بين C_1A و C_1B حيث أن النقاط تقع على استقامة واحدة فالبعد بين A و B ثابت معلوم ومنه :

$$6 - 2 = \underbrace{4}_{\text{درجات الحرية}}$$

مثال (6) :

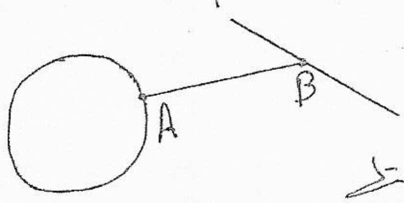
درجات حرية قضيب AB الطليق في الفضاء :



يتعين القضيب الطليق في الفضاء إذا علم موضع نقطتين منه أي 6 وسطاء ، ولكن هذه الوسطاء مرتبطة بعلاقة واحدة هي البعد الثابت بين النقطتين A و B مما يدل على أن :

للقضيب 5 درجات حرية : $6 - 1 = 5$

مثال (7): عدد درجات حرية جسم صلب مؤلف من قضيب يتحرك في الفضاء بحيث يلازم أحد طرفيه سطح كرة ثابتة والطرف الآخر يلازم مستقيم ثابت:



A له 3 وسطاء } 6 وسطاء غير مستقلة
B له 3 وسطاء

يوجد ٤ علاقات ارتباط {
A تلازم الكرة فتحقق معادلتها
B تلازم مستقيم فتحقق معادلته { معادلتي مستوي }
علاقة البعد بين A و B

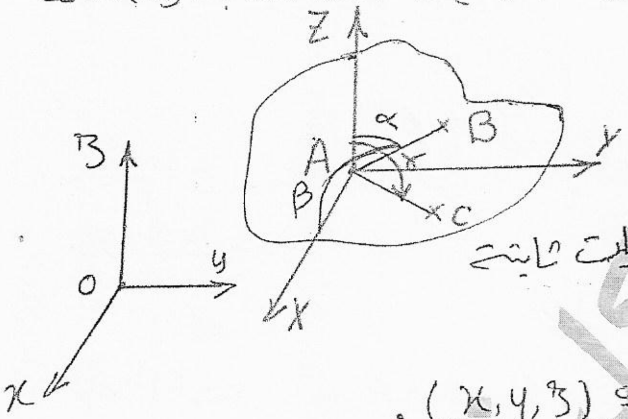
عدد درجات الحرية = عدد الوسطاء − عدد علاقات الارتباط

$$6 - 4 = 2$$

أي يوجد درجتي حرية لهذا القضيب.

ملاحظة:

يمكن البرهان على أن حركة الجسم الصلب تتعين بـ ستة وسطاء في الحالة العامة بالطريقة التالية أيضاً:



نأخذ ثلاث نقاط من الجسم لا تقع على استقامة واحدة ولتكن A و B و C

لتعيين مواضع النقاط الثلاثة نأخذ مجموعة احداثيات ثابتة $OXYZ$.

- إن النقطة A تتعين بثلاث احداثيات هي (x, y, z).

لنأخذ جملة محاور جديدة مرتبطة مع الجسم مبدأها النقطة A ومحاورها $AXYZ$ توازي المحاور $OXYZ$.

- لتعيين موضع النقطة B نرسم المستقيم المار من A و B فيصنع هذا المستقيم مع المحور AZ زاوية ولتكن α. والمستوي المار من B و AZ يصنع مع المستوي AXZ زاوية β.

بمعرفة α و β يتعين وضع النقطة B.

- أما لتعيين موضع النقطة C: C هي ثابتة في المستوي ABC الذي يصنع مع المستوي ABZ زاوية ولتكن γ وهي كافية لتعيين C.

وبالتالي لتعيين مواضع النقاط الثلاث يلزم ستة متحولات (ستة وسطاء) x و y و z و α و β و γ.

- أي لتعيين موضع الجسم الصلب في الحالة العامة يلزمنا 6 وسطاء مستقلة بدلالة الزمن.

ملاحظة :

لتعيين حركة الجسم الصلب في الحالة العامة يلزمنا احداثيات احدى نقاط الجسم الصلب وزوايا أولر سنأخذها لاحقاً .

(لكن أوردنا α و β و γ فقط من أجل البرهان بأن الجسم الصلب يتعين في الحالة العامة بـ 6 وسطاء)

حركة الجسم الصلب :

تقسم حركات الجسم الصلب حسب صفاتها المميزة إلى ست حركات وهي :

1) الحركة الانسحابية (الانتقالية)

2) الحركة الدورانية حول محور ثابت

3) الحركة الدورانية حول محور منزلق

4) الحركة المستوية

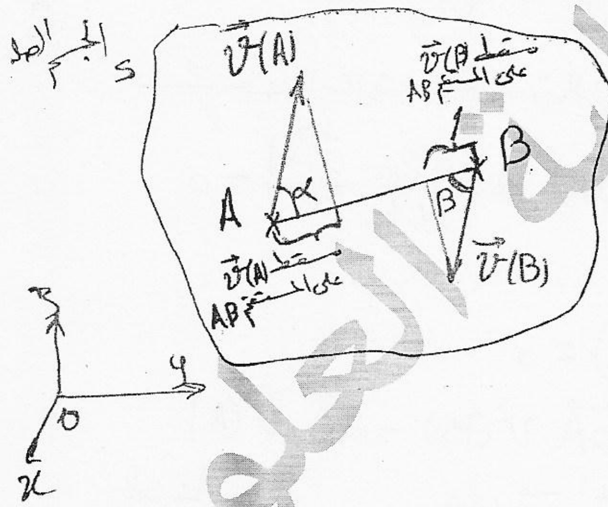
5) الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة .

6) الحركة العامة للجسم الصلب .

سنتعرف على النظرية الأساسية في الحركة :

النظرية الأساسية للحركة :

الشرط اللازم والكافي كي يتحرك جسم صلب هو أن يتساوى مسقطا سرعتي كل نقطتين من نقاطه على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين .



البرهان :

ليكن لدينا A و B نقطتين من الجسم الصلب

من تعريف الجسم الصلب يكون :

$$|\vec{AB}| = c \Leftrightarrow \vec{AB}^2 = c^2$$

حيث c عدد ثابت .

بالاشتقاق بالنسبة للزمن :

$$\Leftrightarrow 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

باستخدام علاقة شال : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$\frac{d}{dt}\vec{AB} = \frac{d}{dt}(\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt}$$

$$= \vec{v}_{(B)} - \vec{v}_{(A)}$$

بالتعويض

$$\Leftrightarrow \vec{AB}(\vec{v}_{(B)} - \vec{v}_{(A)}) = 0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{v}(B) = \vec{AB}\cdot\vec{v}(A)$$

$$|\vec{AB}|\cdot|\vec{v}(B)|\cos\beta = |\vec{AB}||\vec{v}(A)|\cos\alpha$$

ان المقدار $|\vec{AB}|$ هو كمية عددية ثابتة يمكن الاختصار عليها

$$\Longleftrightarrow |\vec{v}(B)|\cos\beta = |\vec{v}(A)|\cos\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \text{Proj}_{AB}\,\vec{v}(B) = \text{Proj}_{AB}\,\vec{v}(A)$$

أي أن مسقط $\vec{v}(A)$ على AB = مسقط $\vec{v}(B)$ على AB

ملاحظة:

ان النظرية السابقة تفيد بالحكم على مجموعة مادية فيما إذا كانت جسم صلب أولا فلو اختلفت قيمة مسقط سرعة النقطة A على المستقيم AB عن قيمة مسقط سرعة B على AB وتحركت النقطتين A و B بحيث تتباعدان أو تقتربان من بعضها البعض لما بقي البعد بينهما ثابت.

تمرين:

صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB رأسه O ثابت. برهن أن قياس مسقط سرعة النقطة A على المستقيم OB يساوي قياس مسقط سرعة النقطة B على OA.

الحل: من تعريف الجسم الصلب

$$|\vec{AB}| = C \Longrightarrow \vec{AB}^2 = C^2$$

نشتق العلاقة بالنسبة للزمن:

$$2\vec{AB}\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{AB}\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right) = 0 \Longrightarrow (\vec{OB}-\vec{OA})\,\frac{d(\vec{OB}-\vec{OA})}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow (\vec{OB}-\vec{OA})\left(\frac{d\vec{OB}}{dt}-\frac{d\vec{OA}}{dt}\right) = 0$$

$$(\vec{OB}-\vec{OA})(\vec{v}(B)-\vec{v}(A)) = 0$$

$$\vec{OB}\cdot\vec{v}(B) - \vec{OB}\,\vec{v}(A) = \vec{OA}\cdot\vec{v}(B) - \vec{OA}\cdot\vec{v}(A)$$

لدينا:

$$\vec{OB}\cdot\vec{v}(B) = 0 \quad , \quad \vec{OA}\cdot\vec{v}(A) = 0$$

لأن متجه السرعة يعامد متجه الانتقال (لأن O ثابت)

$$\Longrightarrow -\vec{OB}\cdot\vec{v}(A) = \vec{OA}\cdot\vec{v}(B)$$

$$\Longrightarrow |\vec{OB}|\cdot|\vec{v}(A)|\cos\alpha = |\vec{OA}|\cdot|\vec{v}(B)|\cos\beta$$

المثلث متساوي الساقين $\Leftarrow |\vec{OB}| = |\vec{OA}|$

$$\Longrightarrow |\text{proj}_{OB}\,\vec{v}(A)| = |\text{proj}_{OA}\,\vec{v}(B)|$$

تمرين :

A، B، C ثلاث نقاط من جسم صلب يتحرك بحيث تكون مواضع ومتجهات سرعة هذه النقاط في لحظة t معلومة هي :

$A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$

$\vec{v}(A)=(2,1,-3)$, $\vec{v}(B)=(0,3,-1)$, $\vec{v}(C)=(-1,2,-1)$

والمطلوب عين متجهات سرعة النقاط التالية :

$M_1(1,0,1)$, $M_2(1,2,0)$

في اللحظة المذكورة .

الحل : نفرض سرعة M_1 هي $\vec{v}(M_1)=(x,y,z)$

فحسب النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب :

نأخذ M_1 مع A :

$$\vec{AM_1}\cdot\vec{v}(A)=\vec{AM_1}\cdot\vec{v}(M_1)$$

$$(1,0,1)\cdot(2,1,-3)=(1,0,1)(x,y,z)$$

$$2.1+1.0+(-3).1=x+z \Longrightarrow \boxed{x+z=-1} \quad (1)$$

نأخذ M_1 مع B :

$$\vec{BM_1}\cdot\vec{v}(B)=\vec{BM_1}\,\vec{v}(M_1)$$

$$(0,-1,1)(0,3,-1)=(0,-1,1)(x,y,z)$$

$$-3-1=-y+z \Rightarrow \boxed{-y+z=-4} \quad (2)$$

نأخذ M_1 مع C :

$$\vec{CM_1}\cdot\vec{v}(C)=\vec{CM_1}\cdot\vec{v}(M_1)$$

$$(0,-1,0)(-1,2,-1)=(0,-1,0)(x,y,z)$$

$$-2=-y \Rightarrow \boxed{y=2}$$

نعوض في (2) $z=-4+2=-2$, $\boxed{z=-2} \xLeftarrow{\text{نعوض في (1)}} x=-1+2=1$

$\Leftarrow \boxed{x=1}$

ومنه نجد أن سرعة $\vec{v}(M_1)$ هي $\vec{v}(M_1)=(1,2,-2)$

بنفس الطريقة نحسب السرعة M_2 :

نفرض أن $\vec{v}(M_2)=(x,y,z)$ وحسب النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب :

نأخذ M_2 مع A :

$$\vec{AM_2}\cdot\vec{v}(A)=\vec{AM_2}\,\vec{v}(M_2)$$

$$(1,2,0)(2,1,-3)=(1,2,0)(x,y,z)$$

$$\boxed{4=x+2y} \quad (1)$$

نأخذ M_2 مع B :

$$\vec{BM_2}\cdot\vec{v}(B) = \vec{BM_2}\cdot\vec{v}(M_2)$$

$$(0,1,0).(0,3,-1) = (0,1,0)(x,y,z)$$

$$\boxed{3 = y} \quad (2)$$

نأخذ C مع M_2 :

$$\vec{CM_2}\cdot\vec{v}(C) = \vec{CM_2}\cdot\vec{v}(M_2)$$

$$(0,1,-1)(-1,2,-1) = (0,1,-1)(x,y,z)$$

$$\boxed{3 = y - z} \quad (3)$$

بالحل المشترك لـ (1) و(2) و (3)

$$x = -2 \,,\ y = 3 \,,\ z = 0$$

$$\vec{v}(M_2) = (-2,3,0)$$

تمرين: بفرض أن A, B, C ثلاث نقاط من مجموعة مادية إحداثياتها:

$$A(0,0,1) \,,\ B(1,1,0) \text{ و } C(1,2,-1)$$

$$\vec{v}(A) = (0,1,2) \,,\ \vec{v}(B) = (0,0,1) \,,\ \vec{v}(C) = (-1,1,1)$$

هل المجموعة التي أخذت منها هذه النقاط متماسكة ؟.

الحل: لنبرهن أن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

$$\vec{AB}(1,1,-1) \,,\ \vec{AC}(1,2,-2) \,,\ \vec{BC}(0,1,-1)$$

هذه الأشعة لا تقع على استقامة واحدة

$$\vec{AB}\cdot\vec{v}(A) \overset{?}{=} \vec{AB}\,\vec{v}(B)$$

$$(1,1,-1)(0,1,2) \overset{?}{=} (1,1,-1)(0,0,1)$$

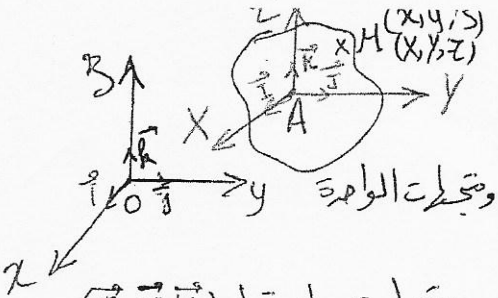
$$-1 = -1$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{v}(C) = \vec{AC}\cdot\vec{v}(A)$$

$$(1,2,-2).(-1,1,1) = (1,2,-2)(0,1,2)$$

$$-1 \neq -2$$

$\Leftarrow$ الجملة غير متماسكة (لا تشكل جسم صلب).



تعيين موضع جسم صلب تحليلياً:

عند تعيين موضع جسم صلب تحليلياً نختار دوماً جملتين

1) جملة إحداثية نعدها ثابتة نرمز لها $Oxyz$ ومتجهات الواحدة هي $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

2) جملة متماسكة مع الجسم الصلب نرمز لها $AXYZ$ ومتجهات واحدتها $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

نقول عن الجملة المتماسكة إنها متحركة لأنها تتحرك بالنسبة للجملة الثابتة $Oxyz$. وبالتالي لتعيين موضع الجسم الصلب بالنسبة للجملة الثابتة $Oxyz$ يكفي أن نعين موضع الجملة المتماسكة معه بالنسبة للجملة الثابتة $Oxyz$.

فإذا أخذنا النقطة M من الجسم الصلب، فإنه يكفي لتعيين موضع M بالنسبة لـ $Oxyz$ أن نعين: $\boxed{1}$ موضع M بالنسبة للجملة المتحركة $AXYZ$ و $\boxed{2}$ موضع الجملة المتحركة بالنسبة الثابتة

$$\vec{AM} = X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$$

حيث (X,Y,Z) مقادير ثابتة غير تابعة للزمن لأن M لا تغير موضعها بالنسبة للجملة المتحركة

لنفترض جيوب تمام توجيه المحاور (AX,AY,AZ) بالنسبة للجملة الثابتة $Oxyz$ (هي مركبات متجهات الواحدة $\vec{I},\vec{J},\vec{K}$):

$$\vec{I}=(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1) \quad , \quad \vec{J}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) \quad و \quad \vec{K}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$$

حيث $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$ تابعة للزمن $(i=1,2,3)$

$$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{OA}+X\vec{I}+Y\vec{J}+Z\vec{K}$$

بما أن النقطة A متماسكة مع الجسم: $\vec{OA}(x_A,y_A,z_A)$ تابعة للزمن.

$$\Rightarrow \vec{OM}=(x_A,y_A,z_A)+X(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+Y(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)+Z(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$$

$$=(x_A,y_A,z_A)+(X\alpha_1,X\beta_1,X\gamma_1)+(Y\alpha_2,Y\beta_2,Y\gamma_2)+(Z\alpha_3,Z\beta_3,Z\gamma_3)$$

$$=(x_A+X\alpha_1+Y\alpha_2+Z\alpha_3,\ y_A+X\beta_1+Y\beta_2+Z\beta_3,\ z_A+X\gamma_1+Y\gamma_2+Z\gamma_3)$$

وبالتالي بالإسقاط:

$$x=x_A+X\alpha_1+Y\alpha_2+Z\alpha_3$$

$$y=y_A+X\beta_1+Y\beta_2+Z\beta_3$$

$$z=z_A+X\gamma_1+Y\gamma_2+Z\gamma_3$$

أي أن الاحداثيات (x,y,z) قد تعينت بـ (12) وسيط تابع للزمن $(i=1,2,3;\ \alpha_i,\beta_i,\gamma_i,x_A,y_A,z_A)$

وهذه الوسطاء مرتبطة بست علاقات ارتباط: $|\vec{I}|^2=|\vec{J}|^2=|\vec{K}|^2=1$ (متجهات واحدة طولها يساوي الواحد) و $\vec{I}\cdot\vec{J}=\vec{J}\cdot\vec{K}=\vec{K}\cdot\vec{I}=0$ (AX, AY, AZ متعامدة مثنى مثنى)

عدد الوسطاء المستقلة $12-6=6$ أي ست وسطاء (وجدناه سابقاً).