كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال 3 : اوجد راسب الدالة $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ في نقاطها الشاذة .

نقاط الشاذة لدالة $f(z)$ هي اصفار المقام أي جذور المعادلة $z^4+1=0$ وهي

$$z_1=e^{i\pi/4}\ ;\ z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}\ ;\ z_3=e^{-i\frac{3\pi}{4}}\ ,\ z_4=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

وجميعها اقطاب بسيطة عندئذٍ من (5) يكون

$$\text{res}\,f(z_1)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}\ ,$$

$$\text{res}\,f(z_2)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i3\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{-i9\pi/4}\ ,$$

$$\text{res}\,f(z_3)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i3\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{i9\pi/4}\ ,$$

$$\text{res}\,f(z_4)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}}=\frac{1}{4}e^{i3\pi/4}\ .$$

$$\text{res}\,f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\quad ;\quad f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{1}{z^4+1}\quad -(5)$$

مثال (4) اوجد راسب الدالة $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z^2}$ في نقاطها الشاذة .

الحل : النقاط الشاذة لدالة $f(z)$ هي $z=0$ وهي نقطة شاذة اساسية لدالة $f(z)$ ولنشوف لو ان لدالة $f(z)$ في جوار $z=0$ هو

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^7}-\cdots$$

اسأل $\frac{1}{z}$

معنى كونه معامل عدد حدود غير منتهي في الجزء الاساسي والراسب في $z=0$ هو $c_{-1}=0$

أي $\text{res}\,f(0)=0$.

Сканировано с CamScanner

* إذا كانت الدالة $f(z)$ لها الشكل $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ حيث كل من φ, ψ تحليلية في النقطة z_0 لها صفر من مرتبة أعلى من واحد (ليس صفر بسيط)

عندئذٍ نفرض مسبقاً أن لهما نفس مرتبة الصفر في الجوار z_0

مثال 5: أوجد راسب الدالة $f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$ في الجوار $z=0$.

الحل: النقطة $z=0$ هي صفر لكل من البسط $\varphi(z)=\sin 3z-3\sin z$ وصفر للمقام $\psi(z)=(\sin z-z)\sin z$ ولمعرفة مرتبة الصفر لكل من الدالتين لدينا من منشور تايلور في جوار $z=0$ لدالة $\sin z$:

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

لدينا

$$\varphi(z)=\sin 3z-3\sin z = 3z-\frac{3^3z^3}{3!}+\frac{3^5z^5}{5!}-\cdots-3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$\varphi(z)=-\frac{3^3-3}{3!}z^3+\frac{3^5-3}{5!}z^5-\cdots = z^3\varphi_1(z)$$

أي أن $\varphi_1(z)=-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\cdots$; $\varphi_1(0)=-4\neq 0$;

وكذلك $\psi(z)=(\sin z-z)\sin z=\left(-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$

$$\psi(z)=z^4\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots\right)\left(1-\frac{z}{3!}+\cdots\right)=z^4\psi_1(z);$$

أي أن $\psi_1(z)=\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots\right)\left(1-\frac{z}{3!}+\cdots\right)$ و $\psi_1(0)=-\frac{1}{6}\neq 0$.

وبالتالي $f(z)=\frac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}=\frac{z^3}{z^4}\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}=\frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)}$,

وبما أن $\varphi_1(0)\neq 0$, $\psi_1(0)\neq 0$ فإن $z=0$ صفر بسيط للدالة ومنه الراسب

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\varphi_1(z)}{z\psi_1(z)}\cdot z=\frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)}=\frac{-4}{-\frac{1}{6}}=24.$$

(يعطينا من العلاقة (5))

Сканировано с CamScanner

مثال 6: أوجد الحيود لدالة $f(z)=\frac{e^{1/z}}{1-z}$ في نقاطها الشاذة.

الحل: النقاط الشاذة هي $z=1$ و $z=0$ حيث $z=1$ قطب بسيط و

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\left.\frac{e^{1/z}}{-1}\right|_{z=1}=-e$$

لمعرفة نوع النقطة الشاذة $z=0$ نوجد مفكوك لوران للدالة $f(z)$ في جوار $z=0$ حيث:

$$\begin{cases} e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots & (1)\\ \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots & (2)\end{cases}$$

من (1) و (2) نجد

$$f(z)=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+C_{-2}\frac{1}{z^2}+\cdots+\cdots$$

حيث $C_{-k}\neq 0$ و $k=2,3,\cdots$ وحسب التعريف الأساسي لسلسلة لوران عبر منتهي و $z=0$ نقطة شاذة أساسية والراسب هي أمثال $\frac{1}{z}$ أي

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=C_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e-1$$

مثال 7: أوجد الراسب لدالة $f(z)=\cos z\sin\frac{1}{z}$ في النقطة $z=0$ الشاذة.

الحل: لمعرفة نوع النقطة الشاذة $z=0$ نوجد مفكوك لوران لدالة $f(z)$ في جوار $z=0$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots \quad (1)$$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots \quad (2)$$

Сканировано с CamScanner

بالتالي من (1) و (2)

$$f(z)=\cos z\cdot \sin\frac{1}{z}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)$$

$$f(z)=\left(1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!5!}+\cdots\right)\frac{1}{z}-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!5!}+\cdots\right)\frac{1}{z^3}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}\right)\frac{1}{z}+c_{-3}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

هنا $c_{(2k-1)}\neq 0$ حيث $k=1,2,\cdots$ أي الجزء الأساسية من السلسلة غير منتهية

و $z=0$ نقطة شاذة أساسية لدالة $f(z)$ و الراسب يساوي c_{-1}

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left(\cos z\sin\frac{1}{z}\right)=c_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$

مثال 8 : أوجد راسب الدالة $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z+1}$ في نقاطها الشاذة .

الحل: النقطة الشاذة لدالة $f(z)$ هي $z=-1$ ولمعرفة نوعها نوجد منشور لوران في جوار $z=-1$ وذلك نوجد منشور لوران لكل من z^2 و $\sin\frac{1}{z+1}$ في جوار $z=-1$ على انفراد.

لدينا

$$z^2=\left[(z+1)-1\right]^2=(z+1)^2-2(z+1)+1 \quad -(1)$$

$$\sin\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\cdots \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z+1}=\left(1-2(z+1)+(z+1)^2\right)\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z+1)^3}-\cdots\right)$$

$$f(z)=\left(1-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z+1}+\frac{2}{3!}\frac{1}{(z+1)^2}+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{(z+1)^3}+\cdots+\left[-2+(z+1)\right].$$

سلسلة لوران تحوي عدد لانهائي من الحدود في القسم الأساسي فالسلسلة لدالة $z=-1$ نقطة شاذة أساسية و

$$\operatorname*{res}_{z=-1}f(z)=c_{-1}=1-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}.$$

Сканировано с CamScanner

مثال: اوجد الراسب عن النقطة $z=0$ لدالة $f(z)=e^{1/z^2}\cos z$

الحل: $z=0$ نقطة شاذة للدالة ولمعرفة نوعها نوجد سلسلة لورنت حول $z=0$ لدينا

$$e^{1/z^2}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{3!\,z^6}+\cdots \quad (1)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \quad (2)$$

من (1) و(2) نجد

$$f(z)=\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\cdots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

من الواضح أنه لا يمكن ايجاد امثال $\frac{1}{z}$ أي c_{-1} معدوم والمتسلسلة تشمل حدود لا نهائي أي $z=0$ نقطة شاذة اساسية لدالة $f(z)$ و

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=0$$

Сканировано с CamScanner

مثال 3 : احسب قيمة التكامل

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz .$$

الحل : في المجال $D: |z-i| < \frac{3}{2}$ الدالة $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$

تمتلك نقطتين شاذتين $z_1 = i, z_2 = 0$

Сканировано с CamScanner

$z=i$ قطب بسيط ، $z=0$ نقطة شاذة أساسية .

من العلاقة (5)

$$res f(i) = \frac{e^{1/z^2}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

لإيجاد الراسب في النقطة $z=0$ يلزمنا مفكوك لوران للدالة $f(z)$ بجوار $z=0$

لدينا مفكوك e^{1/z^2} في جوار الصفر :

$$e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} + \frac{1}{3!\,z^6} + \cdots$$

$$\frac{1}{z^2+1} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

$$\Rightarrow \text{بالتالي} \quad f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} = \left(1 - z^2 + z^4 - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} \cdots\right)$$

من الواضح أن مفكوك لوران للدالة $f(z)$ يحوي فقط القوى الزوجية لكل من z و $\frac{1}{z}$

بالتالي $c_{-1} = 0$ أي

$$res f(0) = 0$$

وحسب نظرية كوشي للراسب

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{e} .$$

مثال 4 : احسب التكامل $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz$.

الحل

في المجال $|z| \le 2$ الدالة $f(z)$ تحليلية باستثناء $z=0$, $z=1$ حيث

$z=1$ قطب بسيط والراسب فيه

$$res\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^1}\Big|_{z=1} = \sin 1$$

$z=0$ نقطة شاذة أساسية والراسب فيها يساوي c_{-1} من مفكوك لوران للدالة

$f(z) = \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ في النقطة $z=0$

Сканировано с CamScanner

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot\sin\frac{1}{z}=-(1+z+z^2+\cdots)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)=$$

$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots\right)\frac{1}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots+\text{الجزء الباقي}+\cdots$$

$$c_{-k}\neq 0\ ;\ k=2,3,\cdots$$

وحسب نظرية لوران يحوي عدد لا نهائي من الحدود السالبة لقوى z

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}=c_{-1}=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots\right)=-\sin 1$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2}\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\,(\sin 1-\sin 1)=0\ .$$

Сканировано с CamScanner

مكتبة A to Z