كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

نشر تابع معزول في سلسلة لوران حول نقطة شاذة :

مبرهنة (3) : إذا كان f تابعاً تحليلياً في الجوار المنقوص (الحلقة)

فإن $K : 0 < |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n \; ; \; z \in K \quad \text{--(1)}$$

حيث الأمثال C_n تعطى بالعلاقة

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

$$; \gamma_\rho : |\xi - a| = \rho \quad (0 < \rho < r) \quad \text{--(2)}$$

مبرهنة (4) : إذا كان f تابعاً تحليلياً في الجوار المنقوص للنقطة ∞ : $K : R < |z| < +\infty$

فإن $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n \; ; \; z \in K \quad \text{--(3)}$

ملاحظة : القسم الرئيسي f_1 من سلسلة لوران (1) هو القسم ذو الأسس السالبة $\left(\sum_{-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n \right)$ والقسم العادي f_2 هو القسم ذو الأسس الموجبة مع الحد الحر C_0
$\left(\sum_{0}^{\infty} C_n (z-a)^n \right)$

ولكن القسم الرئيسي f_1 من سلسلة لوران (3) هنا حول النقطة $z = \infty$ هو القسم ذو الأسس الموجبة والقسم العادي f_2 لهذه السلسلة هو القسم ذو الأسس السالبة مع حدها الحر C_0

:

Не нужна его Дом нет

мазнеки ститомир ...

النقاط الشاذة ونوعها للدوال التالية.

1) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ ،

النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي $z=0$ ولدينا

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

بالتالي $z=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة ويمكن إزالتها بكتابة الدالة $f(z)$ بالشكل

$$f(z) := \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & ; z \neq 0 \\ 1 & ; z = 0 \end{cases}$$

2) $f(z) = \frac{1}{z^3}$ ،

النقاط الشاذة هي $z=0$ و

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z^3} = \infty$$

بالتالي $z=0$ قطب وهو من المرتبة الثالثة

ملاحظة: نقول عن النقطة الشاذة z_0 أنها قطب من الدرجة m إذا تحقق أنه

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ حيث $\varphi(z)$ دالة تحليلية وتحقق $\varphi(z_0) \neq 0$

3) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$ ،

للدالة $f(z)$ يوجد النقاط الشاذة التالية $z=-1$ و $z=1$ وذلك لأنه

$z^3 + z^2 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)^2 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$
$z_2 = -1$

من أجل $z_1 = 1$ لدينا

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \infty$$

أي z_1 قطب ولمعرفة مرتبته نكتب

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{(z-1)} = \frac{\varphi_1(z)}{(z-1)}$$

حيث $\varphi_1(z)$ تحليلية في النقطة $z_1 = 1$ و $\varphi_1(1) = \frac{\sin 1}{4} \neq 0$

أي $z_1 = 1$ قطب من المرتبة الأولى.

٢) من أجل $z_2 = -1$ لدينا

$$\lim_{z \to -1} f(z) = \infty$$

أي z_2 قطب ولمعرفة مرتبته نكتب

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{(z-1)}}{(z+1)^2} = \frac{\varphi_2(z)}{(z+1)^2}$$

حيث $\varphi_2(z)$ تحليلية في النقطة $z_2 = -1$ و $\varphi_2(-1) = \frac{+\sin 1}{2}$

أي $z_2 = -1$ قطب من المرتبة الثانية.

٢) 14) $f(z) = \frac{1}{z + z^2 - 2\operatorname{ch} z}$ ،

النقطة $z = 0$ هي قطب للدالة $f(z)$ لأن $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$.

ويمكن دراسة مرتبة القطب بطريقة أخرى هي دراسة رتبة الصفر $z = 0$

للدالة $\varphi(z) = z + z^2 - 2\operatorname{ch} z$

* لدينا $\varphi(0) = 0$ ،

$$\varphi'(z) = 2z - 2\operatorname{sh} z \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(z) = 2 - 2\operatorname{ch} z \Rightarrow \varphi''(0) = 0$$

$$\varphi'''(z) = -2\operatorname{sh} z \Rightarrow \varphi'''(0) = 0$$

$$\varphi^{(4)}(z) = -2\operatorname{ch} z \Rightarrow \varphi^{(4)}(0) = -2 \neq 0$$

إ $z=0$ صفر من المرتبة الرابعة لدالة $\varphi(z)=z+z^2-z\,ch\,z$

أي $z=0$ قطب من المرتبة الرابعة لدالة $f(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$

* نبين نوع النقطة الشاذة $z=1$ لدالة $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{ze^{z-1}-z^2-1}$

أولاً لدينا الدالة

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{ze^{z-1}-z^2-1}{\sin\pi z}$$

النقطة $z=1$ هي صفر لدالة $\varphi(z)$ لأن $\varphi(1)=0$ حيث

$$\varphi(z)=ze^{z-1}-z^2-1$$

$$\varphi'(z)=(ze^{z-1}-2z) \Rightarrow \varphi'(1)=0$$

$$\varphi''(z)=ze^{z-1}-2 \Rightarrow \varphi'''(1)=2\neq 0$$

أي $z=1$ هي صفر من المرتبة الثالثة لدالة $\varphi(z)$

الآن نتطرق الدالة $\sin\pi z$ لدينا $\sin\pi=0$ و

$$(\sin\pi z)'=\pi\cos\pi z \Rightarrow \pi\cos\pi=\pi\neq 0$$

أي $z=1$ صفر من المرتبة الأولى لدالة $\sin\pi z$

ومنه $z=1$ قطب لدالة $f(z)$ من المرتبة $3-1=2$

وصفر لدالة $\varphi(z)$ من المرتبة الثانية