كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

5

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مقرر الأمثليات العددية س4/رياضيات
للعام الدراسي 2024-2025
29.4.2025

المحاضرة الأولى:

سعي الإنسان في سلوكه سواء على المستوى الشخصي أو الارتقاء أو العلمي إلى الحصول على أفضل النتائج الممكنة بأقل كلفة وأكثر سرعة ممكنة، أي أنه يعمم هذا النمط السلوكي الفعال أداء المؤسسات والمنظمات والدول، لذلك كان من الأهمية بمكان أن ندرس آليات البحث عن الحلول المثلى الممكنة للإشكالات المتنوعة التي تواجهنا وهذا هو جوهر ومحتوى مقرر الأمثليات.
سنتناول في هذا الفصل طريقتين للبحث عن الأمثل في مقررنا هما * الطرق العددية.
* الطرق التحليلية.

في أي مسألة أو إشكالية تواجهنا لابد بداية من:

1. تحديد الهدف: «objective» : وهو الذي يحدد أداء النظام قيد الدراسة وقد يكون الهدف: فائدة أو ربحية أو طاقة أو أي كمية مناسبة أخرى أو خليط من الكميات. هذا ويجب الهدف ويرتبط بشكل رئيسي بمجموعة من مدخلات النظام تدعى:

2. المتغيرات: «variables» ؛ حيث سنقوم لاحقا بإيجاد قيم المتغيرات التي تعطي الحل الأمثل. وغالبا ما يطبق على هذه المتغيرات مجموعة من:

3. القيود: «constraints»

وبتعريف أبسط: إنه عملية تحديد الهدف، المتغيرات، القيود وعلاقاتها مع بعضها البعض ضمن ما يدعى بعملية النمذجة modeling. إنه سيعالج تأهيل النموذج المناسب في الخطوة الأساسية والأهم في عملية الحصول على الأمثل بعد تكوين نموذج المسألة سيأتي البحث عن خوارزمية العثور «optimization algorithm»

لمحة تاريخية: 1. إنه جذور وأصول مسائل الأمثليات تعود إلى «300» سنة قبل الميلاد عندما أثبت «Euclid» المسافة الأقصر «minimum distance» بين نقطة وخط.
كما أثبت الرياضي اليوناني زينودورس «Zenodorous» عام 200 قبل الميلاد بأن الساحة التي تحتل معلوم المحيط «Peremeter» هي نفسها دائرة.

2. في القرن 17 وضع فيرما أسس التفاضل والتكامل وبين أن تدرج دالة «gradiant of a function» يعني عن نهاية العظمى والصغرى محلياً «a local minimum and local maximum»

3. لاحقاً وضع نيوتن وليبنتز القواعد الرياضية لتفاضل وتكامل المتغيرات «calculus of variables» واستخدم هذا الموضوع في إيجاد القيم الكبرى والصغرى للدوال.

4 وضع كارل جاوس ليجندر "Gauss and Legendre" طريقة لحل مسائل المربعات الصغرى، وقام كوشي بطريقة الانحدار الأشد "steepest descent method" لحل المسائل غير الخطية.

5 أول كتاب يعالج مسائل البرمجة الخطية هو لهاريس هانكوك "Harris Hancock" سنة 1917.

6 في عام 1947 اقترح جورج دانتزج "George Dantizg" طريقة السمبلكس "Simplex Method" لحل مسائل البرمجة الخطية (LP).

7 أهم ما ورد في أبحاث كوهن وتكر "Harold Kahn Albert Tucker" في عام 1951 هي مسائل الأمثلية المقيدة "Constrained Optimization".

8 أهم ما ورد في مسائل الأمثلية الصحيحة "Integer Programming" هو أعمال رالف جومري "Ralph Gomory" في تطوير خطط لحل مسائل البرمجة الصحيحة التي تحتوي متغيرات القرار فيها على أعداد صحيحة فقط.

9 مع تطور الحواسيب ابتداءً من عام 1980 تم حل مسائل الأمثلية على نطاق واسع، وتطوير عدد من الطرق العددية لحل مسائل الأمثلية "Numerical Optimization".

في الوقت الراهن إن مسائل الأمثلية تستخدم في مجالات الاقتصاد، والهندسة، والعلوم، وإدارة الأعمال.

تتكون مسائل الأمثلية من:

1 دالة الهدف: Objective function: وهي الدالة التي سوف يتم العمل على تعظيمها أو تصغيرها، ويرمز لها بالرمز $f(x)$.

2 متغيرات القرار: Decision Variables: وهي المتغيرات التي يتم العمل على تعظيمها أو تصغيرها.

3 متغيرات القيود: Constraints: وهي على نوعين:

Equality constraints: قيود حادة $g(X)=0$

Inequality Constraints: قيود متراجحة $h(X)\geq 0$

"The Feasible Set" : منطقة الحلول الممكنة $\mathcal{R}$

تعريف 1:

$$\mathcal{R} = \{ X \in \mathbb{R}^n : \; g(x) = 0, \; h(x) \geq 0 \}$$

هي منطقة كتتحقق شروط الدالة.

تعريف 2: النقطة التي تبلغ عندها الدالة f أصغر قيمة ممكنة "The Global Minimizer" نقطة القيمة الصغرى

X^* نقطة القيمة الصغرى للدالة f $\Leftrightarrow$ $X^* \in \mathcal{R}$ and $\forall X \in \mathcal{R}$; $f(X) \geq f(X^*)$

ملاحظة: عكس تعريف سابقه انه نعرف نقطة القيمة العظمى للدالة f

"The Global Maximizer"

X^* نقطة القيمة العظمى للدالة f $\Leftrightarrow$ $X^* \in \mathcal{R}$ and $\forall X \in \mathcal{R}$; $f(X) \leq f(X^*)$

تعريف 3: نقطة القيمة الصغرى محلياً: "Local Minimizer"

X^* نقطة صغرى محلياً $\Leftrightarrow$ $X^* \in \mathcal{R}$ and $\exists N \subseteq \mathbb{R}^n$: $\forall X \in (\mathcal{R} \cap N)$; $f(X) \geq f(X^*)$

ملاحظة: بصورة مشابهة نعرف نقطة القيمة العظمى محلياً

"Local Maximizer"

X^* نقطة صغرى عظمى محلياً $\Leftrightarrow$ $X^* \in \mathcal{R}$ and $\exists N \subseteq \mathbb{R}^n$: $\forall X \in (\mathcal{R} \cap N)$; $f(X) \leq f(X^*)$

إن الطرق العددية المتبعة في حل المسائل الأمثلية تسمى
طرقاً تحليلية Analytical Methods أو طرقاً عددية Numerical Methods

في تعقد دالة الهدف، وكبر عدد المتغيرات في شعاع متغيرات القرار X أي عندما $X \in \mathbb{R}^n$ ، $n \geq 3$ تضيع الطرق التحليلية جهد الإنجاز وتكلفة كبيرة الوقت، الجهد، وتكون غير فعالة في إيجاد القيم الأمثلية لدالة الهدف لذلك نلجأ إلى الطرق العددية التي تكون أكثر فعالية وأقل كلفة، خاصة مع إنجازها باستخدام البرامج الحاسوبية.

الشكل العام لمسائل الأمثلية:

$$\max_{X \in \mathbb{R}^n} f(X) \quad \text{أو} \quad \min_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$$

$$\text{s.t} \quad g(X) = 0$$
$$h(X) \geq 0$$

سوف نبدأ بدراسة مسائل الأمثلية غير المقيدة ذات الشكل:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$$

طرق عددية

تستخدم طرق البحث Search Methods وهي تنقسم

لفئتين أساسيتين: [1] طرق البحث الخطي Line Search Methods

[2] طرق منطقة الثقة: Trust Region Methods

إذ طرق البحث العشوائية تعتمد بشكل رئيسي على إعطاء قيمة ابتدائية عشوائية لمتغيرات القرار X_0. إذ هذه القيمة الابتدائية تعتبر منطقياً إذا كانت ذلك ممكناً أو تعطى أحياناً بطريقة عشوائية ليصار بعد ذلك إلى محاولة تحسين هذه القيمة لمتغيرات القرار بناءً على معايير معينة ومن خلال تنفيذ مجموعة من التكرارات تتوقف في حال عدم تحقيق أي تقدم ملحوظ أو عندما نحصل على درجة مقبولة من الدقة والتقريب.

أولاً: في طرق خط البحث: تحدد خوارزمية البحث اتجاه P_k وتبحث في هذا الاتجاه عن X_k للحصول على قيمة جديدة X_{k+1} عند $f(X_{k+1}) \leq f(X_k)$.

إذ مسألة العثور على متغير P_k تتحدد على المسألة $\min_{\alpha>0} f(X_k + \alpha P_k)$ وهي مسألة ذات متغير واحد، عند الحصول على القيمة الجديدة X_{k+1} نقوم بتعيين اتجاه بحث جديد P_{k+1} والبحث في هذا الاتجاه على قيمة أفضل لمتغيرات القرار، يتم التوقف كما أسلفنا عند الحصول على درجة مقبولة من الدقة وغالباً ما يكون المعيار هو: $\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| < \varepsilon$

إذ لكل قيمة جديدة لمتغيرات القرار نقطع مسافات متساوية الطول وفق البداية:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda_k P_k$$

حيث P_k هو اتجاه البحث و λ_k هو طول الخطوة.

The steepest Descent Method طريقة الانحدار الأشد

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k \nabla f(X_k)$$

إن العلاقة السابقة تعطينا صيغة حساب لحلة متغيرات القرار انطلاقاً من القيمة الحالية

$$P_k = -\nabla f(X_k)$$

حيث $\nabla f(X_k)$ هو متجه متدرج التابع f عند X_k

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

و λ_k هو طول الخطوة ويقدر بالطريقة:

$$\min \phi_k(t) = f(X_k - t\nabla f(X_k))$$

وهي مسألة ذات بعد واحد (متغير واحد t).

وعليه تتابع خطوات هذه الطريقة كما يلي: ① نحسب ∇f

② نحسب $\min \phi_0(t)$ حيث $\phi_0(t) = f(X_0 - t\nabla f(X_0))$

③ نحسب $X_1 = X_0 - t_0 \nabla f(X_0)$

④ نتكرر حتى نحسب k في $\min \phi_k(t)$

حيث $\phi_k(t) = f(X_k - t\nabla f(X_k))$

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k \nabla f(X_k)$$

حيث أن λ_k تم إيجاده من حل مسألة الأمثلية ذات المتحول t السابقة

⑤ نتوقف عند تحقق معايير وشروط معينة.

ملاحظة: إن معايير التوقف وشروطه كثيرة نذكر منها:

- عدد تكرارات الخطوة
- عندما يتحقق شرط التوقف عندما $\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$ من قبل
أو من قبل $\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| < \varepsilon$.

مثال:

$$\min f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$$

$X_0^T = (2,3)$ توقف عند X_2

(1) نحسب $\nabla f(x)$:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 8x - 4y \\ -4x + 4y \end{bmatrix}$$

(2) نكون التابع:

$$\phi_0(t) = f(X_0 - t\nabla f(X_0))^T$$

$$X_0 - t\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X_0 - t\nabla f(X_0) = \begin{bmatrix} 2-4t \\ 3-4t \end{bmatrix}$$

$$\phi_0(t) = f\left(\begin{bmatrix} 2-4t \\ 3-4t \end{bmatrix}^T\right) = f(2-4t, 3-4t)$$

$$= 4(2-4t)^2 - 4(2-4t)(3-4t) + 2(3-4t)^2$$

لدينا $\min \phi_0(t)$ عند $\phi_0'(t) = 0$ نحل هذه المعادلة:

$$\phi_0'(t) = 0 \Rightarrow t_0 = \lambda = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = X_0 - \lambda \nabla f(X_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$X_1 = X_0 - \lambda_0 \nabla f(X_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1(t) = f(X_1 - t \nabla f(X_1))$$

$$\nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X_1 - t \nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} 4t \\ 1-4t \end{bmatrix}$$ وبالتالي

$$\phi_1(t) = f\left(\begin{bmatrix} 4t \\ 1-4t \end{bmatrix}^T\right)$$

(4)

$$= f(4t, 1-4t)$$

$$= \min f(4t, 1-4t)$$

$$\min \phi_1(t) =$$

$$\phi_1'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = \lambda_1 = \frac{1}{10}$$

(5)

$$X_2 = X_1 - \frac{1}{10} \nabla f(X_1)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ملاحظات

1- إن [illegible] الخطوات السابقة اتخذنا فيها الرمز t واحيانا الرمز λ حيث انا نفضل استخدام الرمز t انشاء ايجاد $\min \phi_k(t)$ ثم استبدل ضمن العلاقة الى λ_k

والتي تعطى في الخطوة التكرارية $X_{k+1} = X_k - \lambda_k \nabla f(X_k)$

2- كما نستخدم إحدى معايير أوقف التوقف مثل:

$\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$ حيث أن $\|\ \|$ هو نظيم الشعاع $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

المعتاد المستخدم: $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

أو $\|f(X_{k+1}) - f(X_k)\| < \varepsilon$ حيث $\|\ \|$ هو القيمة المطلقة

لـ $f(X) \in \mathbb{R}$.