كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الاستمرار في الفضاءات التبولوجية

تعريف:

إذا كان (X,τ) , (Y,τ^*) فضاءين تبولوجيين كيفيين حيث $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ و كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ:

يقال عن التابع f إنه مستمر عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X,τ).

و يقال عن التابع f إنه مستمر على X إذا و فقط إذا كان مستمراً عند كل $x \in X$.

مثال:

لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \{X,\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\}$ و لتكن $Y = \{1,2,3\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau^* = \{Y,\emptyset,\{1,3\},\{2\}\}$ و لنعرف التابع:

$f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ وفق: $f(a) = f(b) = 1$ & $f(c) = f(d) = 2$

ادرس استمرار التابع f على المجموعة X.

الحل: أسرة مجاورات النقطة $f(a) = f(b) = 1$ في (Y,τ^*) هي $V(1) = \{Y,\{1,3\}\}$

و نلاحظ أن $f^{-1}(Y) = X$ و $f^{-1}(\{1,3\}) = \{a,b\}$ و هما مجاورتان لكلتا النقطتين a,b فالتابع مستمر عند كل من a,b.

من جهة ثانية أسرة مجاورات النقطة $f(c) = f(d) = 2$ هي

$V(2) = \{Y,\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ و لدينا: $f^{-1}(Y) = X$ و $f^{-1}(\{2\}) = \{c,d\}$ و $f^{-1}(\{1,2\}) = X$ و $f^{-1}(\{2,3\}) = \{c,d\}$ و كل مجموعة منها عبارة عن مجاورة لكل من النقطتين c,d فالتابع مستمر عندهما، و بهذا يكون f مستمراً على X.

ملاحظات:

1. التابع $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ مستمر عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$f^{-1}(V) \in V_X(x), \forall V \in V_Y(f(x))$.
2. التابع $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ غير مستمر عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$\exists V_0 \in V_Y(f(x)): f^{-1}(V_0) \notin V_X(x)$

3. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ مستمر على X إذا و فقط إذا كان مستمراً عند كل $x\in X$.
4. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ غير مستمر على X إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$\exists x_0\in X;\ \exists V_0\in V_Y\big(f(x_0)\big): f^{-1}(V_0)\notin V_X(x_0)$ ، بكلامٍ آخر :
f غير مستمر على X إذا و فقط إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 بحيث إن f غير مستمر عند x_0.
5. يكون التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ مستمراً عند النقطة $x\in X$ إذا و فقط إذا كان من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*) توجد مجاورة U للنقطة x في (X,τ) بحيث يكون $f(U)\subseteq V$.

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض أن f تابع مستمر عند النقطة $x\in X$ و لتكن $V\in V_Y\big(f(x)\big)$ مجاورة كيفية، عندئذٍ بحسب تعريف الاستمرار تكون $f^{-1}(V)$ مجاورة للنقطة x في (X,τ) ، ثم إن: $f\big(f^{-1}(V)\big)\subseteq V$ أي أننا وجدنا مجاورة للنقطة x في (X,τ) هي $U=f^{-1}(V)$ بحيث يكون $f(U)\subseteq V$.

$\Rightarrow$: لدينا بالفرض أنه من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*) توجد مجاورة U للنقطة x في (X,τ) بحيث يكون $f(U)\subseteq V$ لنبرهن أن f تابع مستمر عند النقطة $x\in X$:

لتكن V مجاورة كيفية للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عندئذٍ بحسب الفرض توجد مجاورة U للنقطة x في (X,τ) بحيث يكون $f(U)\subseteq V$ ، بأخذ الصور العكسية وفق التابع f لطرفي العلاقة نجد أن: $f^{-1}\big(f(U)\big)\subseteq f^{-1}(V)$

لكن $U\subseteq f^{-1}\big(f(U)\big)$ بالتالي $U\subseteq f^{-1}\big(f(U)\big)\subseteq f^{-1}(V)$ و منه $\mathrm{U}\subseteq f^{-1}(V)$

و بما أن U مجاورة للنقطة x في (X,τ) فإنه توجد مجموعة مفتوحة مثل G بحيث يكون:

$x\in G\subseteq U$ و هذا يعني أن $x\in G\subseteq U\subseteq f^{-1}(V)$

أي أن $f^{-1}(V)$ مجاورة للنقطة x في (X,τ) و هذا يكافئ القول عن f تابع مستمر عند النقطة x.

6. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً قوياً، عندئذٍ أياً كان التابع f ينطلق من (X,τ) و يستقر في أي فضاء تبولوجي آخر فإنه يكون مستمراً أيا كانت قاعدة ربطه.

مبرهنة:

ليكن التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$، الشرط اللازم و الكافي ليكون f مستمراً على X هو أن تكون الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) عبارة عن مجموعة مفتوحة في (X,τ).

إثبات:

$\Longleftarrow$: لدينا بالفرض أن f تابع مستمر على X و لتكن T^* مجموعة مفتوحة كيفية في (Y,τ^*) لنبرهن أن $f^{-1}(T^*)$ مجموعة مفتوحة في (X,τ).

إذا كانت $f^{-1}(T^*)=\emptyset$ فإن $\emptyset\in\tau$ أما إذ كانت $f^{-1}(T^*)\neq\emptyset$ عندئذٍ يوجد $x\in f^{-1}(T^*)$ و هذا يعني أن $f(x)\in T^*$ و بما أن $T^*\in\tau^*$ بالتالي $T^*\in V\big(f(x)\big)$ و لكن التابع f تابع مستمر على X فرضاً فإن الصورة العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X,τ) و منه إن $f^{-1}(T^*)$ مجاورة للنقطة x في (X,τ) و حيث أن النقطة x كيفية من $f^{-1}(T^*)$، فإن المجموعة $f^{-1}(T^*)$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها فهي مجموعة مفتوحة في (X,τ).

$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض أن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) عبارة عن مجموعة مفتوحة في (X,τ)، لنبرهن أن f تابع مستمر على X.

لتكن $x\in X$ نقطة كيفية، و لتكن V^* مجاورة كيفية للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*)، حسب تعريف المجاورة توجد $G^*\in\tau^*$ بحيث $f(x)\in G^*\subseteq V^*$ بالتالي $x\in f^{-1}(G^*)\subseteq f^{-1}(V^*)$ و لكن $f^{-1}(G^*)\in\tau$ حسب الفرض، فتكون $f^{-1}(V^*)\in V(x)$، بمراعاة الاختيار الكيفي للمجاورة V^* نجد أن f تابع مستمر عند النقطة $x\in X$ (الصورة العكسية العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X,τ))، و كون $x\in X$ نقطة كيفية فإن f تابع مستمر على X.

انتهت المحاضرة 5