كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

حساب الأخطاء المرتكبة (الناتجة) من العمليات الحسابية الأساسية:

(1) نظرية: الخطأ المطلق الناتج عن جمع عددين موجبين مدورين لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة في كلٍّ منها

العددين a_1, a_2 $\quad \delta_{a_1+a_2} \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$

وتعمم: $\quad \delta_{\sum_{i=1}^{n} a_i} \le \sum_{i=1}^{n} \delta_{a_i}$

$$\delta_{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \cdots + \delta_{a_n}$$

ملاحظة: الخطأ النسبي المرتكب في مجموع عددين مدورين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية في كلٍّ منهما

$$\rho_{a_1+a_2} \le \rho_{a_1} + \rho_{a_2}$$

$$\rho_{\sum_{i=1}^{n} a_i} \le \sum_{i=1}^{n} \rho_{a_i}$$

(2) نظرية: الخطأ المطلق المرتكب في طرح عددين موجبين مدورين أصغر أو يساوي مجموع كلٍّ منهما:

$$\delta_{a_1-a_2} \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$$

وتعمم: $\quad \delta_{a_1-a_2-\cdots-a_n} \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \cdots + \delta_{a_n}$

ملاحظة: الخطأ النسبي المرتكب من جراء طرح عددين مدورين لا يتجاوز مجموع الأخطاء النسبية في كلٍّ منهما

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$e_{a_1 - a_2} \leq e_{a_1} + e_{a_2}$$

(3) نظرية: الخطأ المطلق المرتكب من جراء جداء عددين بدورين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta_{a_1 \cdot a_2} \leq \delta_{a_1} \cdot a_2 + \delta_{a_2} \cdot a_1$$

ملاحظة: الخطأ النسبي المرتكب من جراء جداء عددين بدورين يساوي مجموع الخطأ النسبي في كلا منهما

$$e_{a_1 \cdot a_2} \leq e_{a_1} + e_{a_2}$$

أو يعطى بالشكل:

$$e_{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{\delta_{a_1 \cdot a_2}}{|a_1 \cdot a_2|}$$

(4) نظرية: الخطأ المطلق المرتكب من جراء قسمة عددين بدورين يساوي مجموع الخطأ النسبي في كلا منهما يعطى بالعلاقة:

$$\frac{\delta_{a_1}}{a_2} \leq \frac{\delta_{a_1} \cdot a_2 + \delta_{a_2} \cdot a_1}{a_2^2} \leq \frac{\delta_{a_1}}{|a_2|} + \frac{\delta_{a_2} \cdot a_1}{a_2^2}$$

$$\text{الخطأ النسبي} \rightarrow e_{\frac{a_1}{a_2}} \leq e_{a_1} + e_{a_2}$$

أو يعطى بالشكل:

ملاحظة: الخطأ النسبي المرتكب من جراء قسمة عددين بدورين يساوي مجموع الخطأ النسبي في كلا منهما

$$e_{\frac{a_1}{a_2}} \leq \frac{\delta_{\frac{a_1}{a_2}}}{\left|\frac{a_1}{a_2}\right|}$$

مثال: احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب قيمة المقدار التالي:

$$L = \frac{x \cdot y - z}{x + z}$$

حيث $x = 0.1$, $y = 0.21$, $z = 0.003$ أعداد بدورة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: لاحظ مطلاً الطاقة المرتكبة في التدوير:

$$\delta_x \leq 5\times10^{-2}$$

$$\delta_y \leq 5\times10^{-3}$$

$$\delta_z \leq 5\times10^{-4}$$

$$\delta_{(x+z)} \leq \delta_x + \delta_z = 5\times10^{-2} + 5\times10^{-4} = 0.0505$$

$$\delta_{(x.y)} \leq \delta_x \cdot y + \delta_y \cdot x = 5\times10^{-2}\times0.21 + 5\times10^{-3}\times0.1$$

$$\delta_{(x.y)} \leq 0.0105 + 0.0005 = 0.011$$

$$\delta_{(x.y-z)} \leq \delta_{x.y} + \delta_z = 0.011 + 0.0005 = 0.0115$$

$$\delta_q \leq \frac{\delta_{x.y-z}}{|x+y|} + \frac{\delta_{(x+z)}\,(x.y-z)}{|x+z|^2}$$

$$\delta_q \leq 0.11165 + 0.00856819968$$

$$\delta_q \leq 0.119733196 8$$

$$e_{x.y} \leq e_x + e_y$$

$$e_x \leq \frac{\delta_x}{|x|} = \frac{5\times10^{-2}}{0.1} = 0.5$$

$$e_y \leq \frac{\delta_y}{|y|} = \frac{5\times10^{-3}}{0.21} = 0.023809523$$

$$e_z \leq \frac{\delta_z}{|z|} = \frac{5\times10^{-4}}{0.003} = 0.166666666$$

$$\Rightarrow e_{x.y} \leq e_x + e_y = 0.5 + 0.0238095 23$$

$$e_{x.y} \leq 0.523809523$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\rho_{(x.y-z)} \leq \rho_{x.y} + \rho_z = 0.523809523 + 0.166666666$$

$$\rho_{(x.y-z)} \leq 0.690476189$$

$$\rho_{x+z} \leq \rho_x + \rho_z = 0.5 + 0.166666666$$

$$\rho_{x+z} \leq 0.666666666$$

$$\rho_f \leq \rho_{(x.y-z)} + \rho_{x+z} = 0.690476189 + 0.666666666$$

$$\rho_f \leq 1.357142855$$

الأخطاء المطلقة والنسبية المرتكبة في حساب قيمة الدالة f عند نقطة ما:

لتكن لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عند حساب قيمة هذه الدالة في نقطة ما $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ من مجال تعريفها حيث تكون الإحداثيات x_i ; $i = \overline{1,n}$ السابقة أعداد معروفة بدقة الخطأ المطلق المرتكب في كل إحداثي x_i على حدا أي δx_i ; $i = \overline{1,n}$ ويكون الخطأ المطلق الأعظمي هو

$$(\delta f)_{max} \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \cdot \delta x_i$$

ويكون الخطأ النسبي الأعظمي المرتكب في حساب قيمة الدالة f في النقطة المعطاة $(x_1, \ldots, x_n)$ من مجال التعريف معطى بالعلاقة:

$$(\rho f)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: اوجد الخطأ المطلق والنسبي العظمى في حساب قيمة الدالة $f(x,y)=\frac{\ln(x.y)}{e^{x+y}}$ في النقطة $(0.1, 0.21)$

اذا: $\delta_x \leq 5\times10^{-2}$ $\quad \delta_y \leq 5\times10^{-3}$

$$(\delta f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(0.1,0.21)\right|\delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(0.1,0.21)\right|\delta_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{x}e^{x+y} - e^{x+y}\ln(x.y)}{e^{2(x+y)}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln(x.y)}{e^{x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0.1,0.21) = \frac{\frac{1}{0.1} - \ln(0.1\times0.21)}{e^{0.1+0.21}} = 10.16794$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(0.1,0.21)\right|\delta_x = 0.50839$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{y}e^{x+y} - e^{x+y}\ln(x.y)}{e^{2(x+y)}} = \frac{\frac{1}{y} - \ln(x.y)}{e^{x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0.1,0.21) = \frac{\frac{1}{0.21} - \ln(0.1\times0.21)}{e^{0.1+0.21}} = 6.32608$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(0.1,0.21)\right|\delta_y = 6.32608\times5\times10^{-3} = 0.03163$$

$$(\delta f)_{max} \leq 0.50839 + 0.03163 \leq 0.54002701$$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f(0.1,0.21)|} = \frac{0.54002701}{12.833471}$$

$$(e_f)_{max} \leq 0.1905888819$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الفصل الثاني

الحلول التقريبية للمعادلات غير الخطية:

تعريف: نسمي المعادلة المعطاة بالصيغة:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad ; a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$

بينما $x_i = 1, n$ أو x_i يأخذ من الدرجة الأولى بمعادلة خطية

تعريف: أي شكل للمعادلة يختلف عن الشكل السابق نسمية معادلة غير خطية

لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات غير الخطية $y = P(x_1, \dots, x_n) = 0$ يجب أن نرفق المجال $[a,b]$ الذي يحوي الحل المطلوب ونرفق أيضاً العدد الحقيقي ε وهو صغير جداً بالقدر الذي نشاء ويدعى هذا العدد بدقة الحل أو الخطأ المسموح به.

إذا فرضنا أن الحل الدقيق لهذه المعادلة هو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ وأن الحل التقريبي الناتج هو: $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

فإن: $|\alpha - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow \alpha = \bar{x} \pm \varepsilon$

في هذه الطرائق نحصل على جذور تقريبية للمعادلة المعطاة ونحصل على هذه الجذور بأخذ قيمة ابتدائية $x_0 \in [a,b]$ وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على جذر وقيمته x_1 فإذا كان الفرق بين المقدار الناتج والقيمة الابتدائية أصغر تماماً من ε أي $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ نعتبر أن x_1 هو الجذر التقريبي المطلوب وإذا لم يتحقق ذلك نعاود اختيار قيمة أخرى ونعوضها في المعادلة المعطاة لنحصل على جذر آخر مثل x_2 فإذا تحقق أن

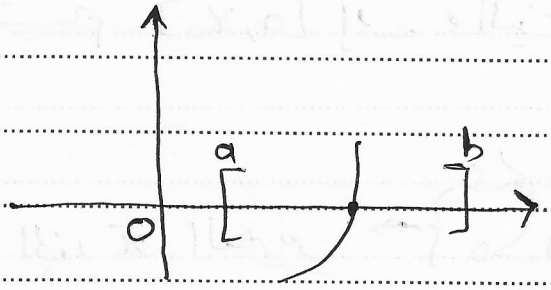
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\varepsilon > |x_2 - x_1|$ فنتوقف عن البحث عن الجذر التقريبي وهكذا.

* لدينا عدة طرائق للحصول على جذر تقريبي ندرس منها الطرائق الآتية:

أولاً: طريقة تصنيف المجال:

وقبل البدء بالحل علينا عزل الجذر المطلوب في مجال صغير يحتوي في المجال المعطى $[a,b]$



إذا تحقق أن $f(a).f(b)<0$ أي أن الدالة غيرت إشارتها من الموجب إلى السالب أو بالعكس لدى مرورها في نقطة الجذر.

الخطوة الأولى:

نصنف المجال المعطى $x_0 = \frac{a+b}{2}$ نعوض في المعادلة المعطاة $f(x_0)$ إذا كان $|f(x_0)| < \varepsilon$ نعتبر x_0 هو جذر تقريبي لهذه المعادلة

وإذا لم يتحقق ذلك فإن النقطة x_0 تقسم المجال المعطى إلى مجالين $[a,x_0]$, $[x_0,b]$ إذا كان:

$f(a).f(x_0)<0$ } → الجذر $\bar{x} \in [a,x_0]$
$f(x_0).f(b)>0$ }

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا كان:

$f(a)\cdot f(x_0)>0$
$f(x_0)\cdot f(b)<0$
$\Rightarrow$ الجذر $\bar{x}$ التقريبي $\in [x_0,b]$

وإذا كان المجال هو $[a,x_0]$:

الخطوة الثانية: $x_1=\frac{a+x_0}{2}$

إذا كان $|f(x_1)|<\varepsilon$ نعتبر x_1 الجذر التقريبي المطلوب
وإلا فإننا x_1 تقسم $[a,x_0]$ إلى مجالين $[x_1,x_0]$ و $[a,x_1]$

إذا كان:

$f(a)\cdot f(x_1)<0$
$f(x_1)\cdot f(x_0)>0$
$\Rightarrow$ الجذر $\bar{x}$ التقريبي $\in [a,x_1]$

إذا كان:

$f(a)\cdot f(x_1)\not<0$
$f(x_1)\cdot f(x_0)<0$
$\Rightarrow$ الجذر التقريبي $\bar{x} \in [x_1,x_0]$

إذا كان المجال هو $[a,x_1]$ فإنه $x_2=\frac{a+x_1}{2}$
وهكذا

مثال:

$f(x)=x^3-x-1=0$

$\varepsilon=0.06$

أوجد الجذر التقريبي لهذه المعادلة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل :

x	$f(x)$
0	−
1	−
2	+

هذا يعني أن المجال $[a,b]$ هو:

$[a,b] = [1,2]$

$x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$f(1.5) = 0.875 \Rightarrow |f(1.5)| = 0.875 > \varepsilon$

طالما أنّ:

$f(1.5) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \bar{x} \in [1, 1.5]$

$x_1 = \frac{1+1.5}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25$

$\Rightarrow f(1.25) = -0.2968$

$|f(1.25)| = 0.2968 > \varepsilon$

طالما أنّ:

$f(1.25) \cdot f(1.5) < 0 \Rightarrow \bar{x} \in [1.25, 1.5]$

$x_1 = \frac{1.25+1.5}{2} = \frac{1.75}{2} = 1.375$

$f(1.375) = 0.22 > \varepsilon \Rightarrow f(1.25) \cdot f(1.375) < 0$

$\Rightarrow \bar{x} \in [1.25, 1.375]$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1.25+1.375}{2} = 1.3125$

$f(1.3125) = -0.05 \Rightarrow |f(1.3125)| = 0.05 < \varepsilon$

$\Rightarrow \bar{x} = 1.3125$

وهو الجذر المطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال وظيفة: $f(x) = x^3 - 3x - 2 = 0$

$\varepsilon = 0.05$

المجال $[a,b] = [2,3]$

احسب الجذر التقريبي لهذه المعادلة.

شرط التوقف:

نتوقف عن إيجاد الجذر التقريبي إذا تحققت المتراجحة الآتية:

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

آخر جذر حصلنا عليه

عندها يكون x_n الجذر المطلوب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z