كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة 1: إذا كان m و n عددين صحيحين ليس كلاهما صفر فإن القاسم المشترك الأكبر لهما يرمز له بـ (m,n) أي

$$\gcd(m,n)=(m,n)$$

برهنة:

إذا كان m,n عددين صحيحين ليس كلاهما صفر

1. $(m,n)=d \iff$ يوجد عددان صحيحان x,y بحيث $d=xm+yn$
2. $(m,n)=1 \iff$ يوجد عددان صحيحان x,y بحيث $1=mx+ny$

التمرين الأول: في الحلقة $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$ برهن ما يلي:

1. $a\in\mathbb{Z}_n$ قابل للقلب $\iff (a,n)=1$
2. كل عنصر في $\mathbb{Z}_n$ إما أن يكون قابل للقلب أو قاسم للصفر.

الحل

برهان 1: الاتجاه الأول: نفرض أن $a\in\mathbb{Z}_n$ عنصراً قابلاً للقلب ولنبرهن أن $(a,n)=1$

a قابل للقلب $\Rightarrow \exists\, b\in\mathbb{Z}_n : a\cdot b=1$

$$\Rightarrow \overline{a\odot b}=1$$

$$\Rightarrow a\cdot b=q_n n+1$$

$\Rightarrow a.b - qn = 1$

$\Rightarrow ab + (-q)n = 1$

$\Rightarrow (a,n) = 1$

حسب النظرية السابقة

$\Leftarrow$ الاتجاه الثاني:

لنفرض أن $(a,n)=1$ ولنبرهن أن a عنصر قابل للقلب في $\mathbb{Z}_n$

$(a,n)=1 \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{Z} ; xa+yn=1$

$\Rightarrow xa = (-y)n + 1$

$\Rightarrow \overline{xa} = 1$

$\Rightarrow x \odot a = 1$

أي أن a قابل للقلب في $\mathbb{Z}_n$

(2) ليكن $a \in \mathbb{Z}_n$ عنصراً غير قابل للقلب ولنبرهن أنه قاسم للصفر:

أ) إذا كان $a=0$ فإن a قاسم للصفر في $\mathbb{Z}_n$

ب) إذا كان $a \neq 0$ وبما أن a غير قابل للقلب فإن:

$(a,n) = d \neq 1$

$(a,n) = d > 1$

لدينا $0 < a < n$

$\Rightarrow 0 < \frac{a}{d} < \frac{n}{d} < n$

$\Rightarrow 0 \neq \frac{n}{d} \in \mathbb{Z}_n$

وكذلك

$$a \cdot \frac{n}{d} = \overline{a} \cdot \frac{n}{d} = \overline{n} \cdot \frac{a}{d} = 0$$

$$a \odot \frac{n}{d} = 0 \; ; \quad \frac{n}{d} \neq 0 \in Z_n \Rightarrow$$

a هو قاسم مُعلي للصفر في Z_n عاسيف نجد أنّه إذا كان يكون a قابل للقلب او قاسم للصفر في Z_n.

السؤال الثاني:

حل المعادلات الآتية في $(Z_8, \oplus, \odot)$

① $3 \odot (x \oplus 7) = 3$

$$3 \odot 3 \odot (x \oplus 7) = 3 \odot 3$$

$$\overline{9} \odot (x \oplus 7) = \overline{9}$$

$$x \oplus 7 = 1$$

$$x \oplus 7 \oplus 1 = 1 \oplus 1$$

$$x + \overline{8} = 2$$

$$x = 2$$

② $3 \odot (x \oplus 7 \oplus x) = 3$

$$3 \odot 3 \odot (x \oplus 7 \oplus x) = 3 \odot 3$$

$$\overline{9} \odot (\overline{2x} \oplus 7) = \overline{9}$$

$$\overline{2x} \oplus 7 = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\overline{2x} \oplus 7 = 1$

$\overline{2x} \oplus 7 \oplus 1 = 1 \oplus 1$

$\overline{2x} \oplus \overline{8} = 2$

$\overline{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 2 + 8n$

$x = \frac{2+8n}{2} = 1 + 4n$

$n = 0 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}_8$

$n = 1 \Rightarrow x = 5 \in \mathbb{Z}_8$

$n = 2 \Rightarrow x = 9 \notin \mathbb{Z}_8$

(3) $2 \odot (x \oplus 7) = 3$

$2 \odot x \oplus 2 \odot 7 = 3$

$\overline{2x} \oplus \overline{14} = 3$

$\overline{2x} \oplus 6 = 3$

$\overline{2x} \oplus 6 \oplus 2 = 3 \oplus 2$

$\overline{2x} \oplus 8 = 5$

$\overline{2x} = 5 \Rightarrow 2x = 5 + 8n$

$x = \frac{5+8n}{2}$ ، $n \in \mathbb{Z}$

إذن $x \notin \mathbb{Z}_8$ من أجل أي $n \in \mathbb{Z}$

وبالتالي المعادلة مستحيلة الحل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) $2 \oplus (x \odot 7) = 3$

$6 \oplus 2 \oplus (x \odot 7) = 3 \oplus 6$

$\overline{8} \oplus (x \odot 7) = \overline{9}$

$x \odot 7 = 1$

$x \odot 7 \odot 7 = 1 \odot 7$

$\Rightarrow x \odot \overline{49} = 7$

$\boxed{x = 7}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة