كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

3

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: لتكن (T) و $(\star)$ عمليتان جبريتان ثنائيتان معرفتان على $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$aTb = a+b-1$$

$$a\star b = a+b-ab$$

وذلك من أجل أي a و b من $\mathbb{Z}$

برهن أن $(\mathbb{Z}, T, \star)$ حلقة تبديلية علماً أنّ $(+)$ و $(.)$ هما عمليتي الجمع والضرب العاديتين

الحل:

أ- لنبرهن أولاً أن $(\mathbb{Z}, T)$ زمرة تبديلية:

- واضح أن $\mathbb{Z} \neq \emptyset$
- T تجميعية لأنّ:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: \quad aT(bTc) = aT(b+c-1)$$

$$= a+b+c-1-1 = a+b+c-2$$

$$(aTb)Tc = (a+b-1)Tc = (a+b-1)+c-1$$

$$= a+b-1+c-1 = a+b+c-2$$

$$\Rightarrow aT(bTc) = (aTb)Tc$$

- إنّ العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية (T) لأنّ:

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$aT0 \Rightarrow aT1 = a+1-1 = a$

$0_{\mathbb{Z}} Ta = 1Ta = 1+a-1 = 1-1+a = a$

لأن T تبديلي

أ: ليكن a عنصراً من $\mathbb{Z}$ عندئذٍ $-a+2 \in \mathbb{Z}$ وهو النظير للعنصر a بالنسبة لـ T لأن:

* $aT(-a+2) = a+(-a+2)-1 = a-a+2-1 = 1 = 0_{\mathbb{Z}}$

* $(-a+2)Ta = (-a+2)+a-1 = -a+2+a-1 = -a+a+2-1$

$= 2-1 = 1 = 0_{\mathbb{Z}}$ (لأن T تبديلي)

ب: T عملية تبديلية لأن:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow aTb = a+b-1 = b+a-1 = (bTa)$

لأن T تبديلي

بما أن 1, 2, 3, 4, 5 كل أن $(\mathbb{Z}, T)$ زمرة تبديلية

ب) لنبرهن أن $\star$ تحقق شروط الحلقة:

أ- $\star$ تجميعية لأن:

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$: $a \star (b \star c) = a \star (b+c-bc)$

$= a+b+c-bc-ab-ac+abc$

$(a \star b) \star c = (a+b-ab) \star c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)*c$

$= a+b-ab+c-ac-bc+abc$

$\Rightarrow a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$

ب- $\star$ تبديلية على $\mathbb{Z}$:

$\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \star b = a+b-ab = b+a-ba = b \star a$

لكي: (*) توزيعي على T لأنّ:

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: a*(b\,T\,c) = a*(b+c-1)$

$= a+b+c-1-ab-ac+a$

$= 2a+b+c-ab-ac-1$

$(a*b)\,T\,(a*c) = (a+b-ab)\,T\,(a+c-ac)$

$= (a+b-ab)+(a+c-ac)-1$

$= a+b-ab+a+c-ac-1$

$= 2a+b+c-ab-ac-1$

$\Rightarrow a*(b\,T\,c) = (a*b)\,T\,(a*c)$

لم يبرهن صحة التوزيع من اليمين لأنّ العملية (*) تبديلية

بما أن $(\mathbb{Z}, T, *)$ حلقة تبديلية.

السؤال الثاني:

لتكن $(A, +, \cdot)$ بنية تكاملية ونرمز لعنصر الواحدة فيها (1) ولصفرها بالرمز (0) ولنفرض أنّ:

$\forall x \in A: x^2 = x$

بين أن $A = \{0,1\}$

الحل: ليكن a عنصر من A فإنّ

$a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0$

وبما أن A بنية تكاملية فإنّ: إمّا $a = 0$

أو $a-1=0 \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow A = \{0,1\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وظيفة: لتكن $(A, +, \cdot)$ منطقة تكاملية و a, b

عنصرين من A بحيث تحقق:

$$a^9 = b^9$$

$$a^{13} = b^{13}$$

برهن أن $a = b$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z