كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

خاصة: (أهم العمليات الآتية في الحلقات):

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما فإنّه يتحقق:

1' $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$

2' $(-a)b = a(-b) = -(ab) \quad \forall a, b \in R$

3' $m(ab) = (ma)b = a(mb) \quad \forall a, b \in R \ \& \ m \in \mathbb{Z}$

4' $(m \cdot n)(a \cdot b) = (ma)(nb) \quad \forall a, b \in R \ \& \ n, m \in \mathbb{Z}$

5' $(-a)(-b) = a \cdot b \quad \forall a, b \in R$

6' $a(b + (-c)) = a(b - c) = ab - ac \quad \forall a, b, c \in R$

خاصة: إذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية، و a عنصر قابل للقلب فيها، فإنّ a ليس قاسم فعلي للصفر (أي أن كل عنصر قابل للقلب يمكن أن يكون قاسم فعلي للصفر).

البرهان:

بما أن a قابل للقلب، فإنّ $a \neq 0$ يختلف عن الصفر، لنفرض جدلاً أن a قاسم للصفر، وبالتالي يوجد عنصر $b \neq 0$ من R يحقق أن $ab = 0$ أو $ba = 0$، وبالتالي إذا كان:

$$ab = 0 \Rightarrow \exists a^{-1}; a^{-1} \cdot a \cdot b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$$

وهذا يناقض بكون $b \neq 0$، وإذا كان:

$$ba = 0 \Rightarrow b \cdot a \cdot a^{-1} = 0 \Rightarrow b \cdot 1 = 0 \Rightarrow b = 0$$

وهذا يناقض بكون $b \neq 0$، وبالتالي a لا يمكن أن يكون قاسم فعلي للصفر

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

الحلقات الجزئية: Subrings

تعريف الحلقة الجزئية: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما، ولتكن B مجموعة جزئية غير خالية من R، إذا كانت B حلقة بالنسبة لقانوني العمليتين $(+)$ و $(\cdot)$ على B فإننا نقول إن B حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$

شروط وكافية لمفهوم الحلقة الجزئية:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ما، ولتكن B مجموعة ما، نقول عن $(B,+,\cdot)$ إنها حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ إذا تحققت الشروط الآتية:

أ) $B \subset R \neq \phi$

ب) $\forall x,y \in B \Rightarrow x-y \in B$

(زمرة جزئية جمعية).

ج) $\forall x,y \in B \Rightarrow x\cdot y \in B$ (مغلقة بالنسبة لعملية الضرب)

أمثلة:

1) إن $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,\cdot)$ علماً أن $(+)$، $(\cdot)$ هما عمليتي الجمع والضرب المعتادتين.

2) لتكن $(A,+,\cdot)$ و $(B,\top,\star)$ حلقتين ما بحيث أن كلاً منهما ذات عنصر وحدة، ولنرمز لعنصر الحلقة $(B,\top,\star)$ بالرمز $0'$ ولتكن Δ و Δ' عمليتين جزئيتين على $A\times B$ بالشكل:

$$(x,y)\,\Delta\,(x',y') = (x+x',\ y\top y')$$
$$(x,y)\,\Delta'\,(x',y') = (x\cdot x',\ y\star y')$$

وذلك من أجل $\forall (x,y),(x',y') \in A\times B$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إنّ $(A\times B, \Delta, \Delta')$ حلقة ذات عنصر وحدة (برأيك ذلك؟)
بيّن أنّ $(A\times\{o'\}, \Delta, \Delta')$ حلقة جزئية من الحلقة
$(A\times B, \Delta, \Delta')$ وذات عنصر وحدة.

الحل:

أ) واضح أنّ $A\times\{o'\}\neq\phi$ & $A\times\{o'\}\subset A\times B$

لكي نبرهن أنّ A حلقة

ب) $\forall x,y\in A \Rightarrow (x,o')\,\Delta\,(-(y,o')) = (x,o')\,\Delta\,(-y,o')$
$= (x-y)\,,\, o'\,T\,o')$
$= (x-y, o') \in A\times\{o'\}$

لكي نبرهن أنّ A حلقة:

ج) $\forall a_1,a_2\in A \Rightarrow (a_1,o')\,\Delta'\,(a_2,o') = (a_1\cdot a_2, o'\star o')$
$= (a_1\cdot a_2, o') \in A\times\{o'\}$

لكي نبرهن أنّ A حلقة

د) إذا رمزنا بـ 1 لعنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,\cdot)$
فإنّ $(1,o')$ هو عنصر الوحدة في الحلقة الجزئية
$(A\times\{o'\}, \Delta, \Delta')$ وذلك لأنّ من جهة أولى لدينا:
$(1,o')\in A\times\{o'\}$

ومن جهةٍ ثانية لدينا:

$\forall a\in A \Rightarrow (a,o')\,\Delta'\,(1,o') = (a\cdot 1, o'\star o') = (a,o')$
& $(1,o')\,\Delta'\,(a,o') = (1\cdot a, o'\star o') = (a,o')$

وهذا يبيّن أنّ $(1,o')$ عنصر الوحدة في $(A\times\{o'\}, \Delta, \Delta')$

ومن أ-ب-ج-د نجد أنّ $(A\times\{o'\}, \Delta, \Delta')$ حلقة
جزئية ذات عنصر وحدة من الحلقة $(A\times B, \Delta, \Delta')$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الهوموومورفيزمات:

ليكن $f: A \to B$ تطبيق بين الحلقة $(A, +, .)$ إلى الحلقة $(B, T, \star)$، نقول عن التطبيق f إنّهُ هوموومورفيزم حلقات إذا حقق الشرطين:

1) $f(x+y) = f(x) \,T\, f(y)$
2) $f(x.y) = f(x) \star f(y)$

$\forall x, y \in A$

أمثلة:

1) لتكن $(A, +, .)$ و $(B, T, \star)$ حلقتين ما، ولترمز لصفر الحلقة $(B, T, \star)$ بالرمز $0'$ إن التطبيق $f: A \to B$ والمعرف بالشكل:

$f(x) = 0' \quad \forall x \in A$

هو هوموومورفيزم حلقات ويدعى بالتطبيق الصفري.

الحل: ①

$\forall x, y \in A \Rightarrow f(x+y) = 0' = 0' T 0' = f(x) \,T\, f(y)$

$f(x+y) = f(x) \,T\, f(y)$

② $\forall x, y \in A \Rightarrow f(x.y) = 0' = 0' \star 0' = f(x) \star f(y)$

$f(x.y) = f(x) \star f(y)$

من ① و ② نجد أن f هوموومورفيزم الحلقات.

2) ليكن $(A, +, .)$ حلقة ما، إن التطبيق $I_A: A \to A$ والمعرف بالشكل:

$I_A(x) = x \quad \forall x \in A$

هوموومورفيزم الحلقات وندعوه بالتطبيق الطابق على A (أو التطبيق المحايد).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) ليكن f_1 هومومورفيزم حلقات لحلقة ما $(A, +, .)$ في حلقة ما $(B, T, \star)$، وليكن f_2 هومومورفيزم حلقات لحلقة ما $(B, T, \star)$ في (D, Δ, Δ') برهن أن $f_2 \circ f_1$ هو هومومورفيزم حلقات.

البرهان:

أ)
$$\forall x, y \in A \Rightarrow (f_2 \circ f_1)(x+y) = f_2(f_1(x+y))$$
$$= f_2(f_1(x) \, T \, f_2(y))$$
$$= f_2(f_1(x) \Delta f_2(f_1(y)))$$
$$(f_2 \circ f_1)(x+y) = (f_2 \circ f_1)(x) \Delta (f_2 \circ f_1)(y)$$

ب)
$$\forall x, y \in A \Rightarrow (f_2 \circ f_1)(x.y) = f_2(f_1(x.y))$$
$$= f_2(f_1(x) \star f_1(y))$$
$$= f_2(f_1(x)) \Delta' f_2(f_1(y))$$
$$(f_2 \circ f_1)(x.y) = (f_2 \circ f_1)(x) \Delta' (f_2 \circ f_1)(y)$$

من أ) و ب) نجد أن $f_2 \circ f_1$ هو هومومورفيزم حلقات.

تعاريف:

أ) ليكن $f: A \to B$ تطبيق من الحلقة $(A, +, .)$ إلى الحلقة $(B, T, \star)$

1) نسمي f إيبومورفيزم حلقات إذا كان f هومومورفيزم تقابل.

2) نسمي f موفومورفيزم حلقات إذا كان f هومومورفيزم تباين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) نسمي f إيزومورفيزم حلقات إذا كان f هومومورفيزم تقابل (غامر ومتباين).

تذكرة:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ متحقق دائماً

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ب) لتكن $(A, +, \cdot)$ و $(B, T, \star)$ حلقتين ما نقول عن الحلقتان السابقتان إذا كانتا حلقتان إيزومورفيزم بين A و B ونكتب

$A \cong B$ أو اختصاراً $(A, +, \cdot) \cong (B, T, \star)$

إذا كان بالإمكان إيجاد إيزومورفيزم على الأقل لأحدى الحلقتين في الأخرى.

ج) لتكن $(A, +, \cdot)$ و $(B, T, \star)$ حلقتين ما ولترمز لصفر الحلقة $(B, T, \star)$ بـ $0'$ إذا كان $f: A \to B$ هومومورفيزم حلقات فإنه يوجد:

$\{x \in A \mid f(x) = 0'\} = f^{-1}(\{0'\})$

فسمّي نواة f ونرمز لها بالرمز $\ker f$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z