كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تذكير: شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) \geq 0$

② $d(x,y) = 0 \iff x = y$

③ $d(x,y) = d(y,x)$

④ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

التمرين الأول:

ليكن X فضاء ما ولنعرف عليه المسافة التالية:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

برهن أن هذا الفضاء مترياً، وماذا نسمي هذا الفضاء؟

الحل:

لنحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) \geq 0$ واضح من التعريف.

② $d(x,y) = 0$ ولنتحقق أن $x = y$

واضح من التعريف $d(x,y) = 0 \iff x = y$

③ لنتحقق من $d(x,y) = d(y,x)$

نراعي حالتين:

أولاً:

$$x \neq y \Rightarrow \left.\begin{matrix} d(x,y) = 1 \\ d(y,x) = 1 \end{matrix}\right\} \iff d(x,y) = d(y,x)$$

ثانياً:

$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$
$d(y,x) = 0$ $\} \Leftrightarrow d(x,y) = d(y,x)$

4) سوف نتحقق من صحة متراجحة المثلث:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

نراعي حالتين:

أولاً: $x = y$

$$0 \leq d(x,z) + d(z,y)$$

حالة محققة دوماً.

ثانياً: $x \neq y$

$$1 \leq d(x,z) + d(z,y)$$

حالة محققة دوماً إلا في حالة:

$x = z \Leftarrow d(x,z) = 0$

$z = y \Leftarrow d(z,y) = 0$

$x = y$

وهذه الحالة غير موجودة لأننا فرضنا $x \neq y$

بعد مناقشة الشروط 1، 2، 3، 4 نجد أن $d(x,y)$ هو فضاء متري ونسمي هذا الفضاء فضاء متري متقطع.

التمرين الثاني:

برهن أن الفضاء R^n

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$ فضاء متري

الحل: لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)} \geq 0$

واضح من التعريف

② $d(x,y) = 0$

$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow x_i = y_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow x = y$

③ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (-1(y_i - x_i))^2}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d(y,x)$

④ لنتحقق من متراجحة المثلث:

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2}$

$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

بعد مناقشة الشروط 1, 2, 3, 4, 5 نجد أن R^n فضاء متري

الفضاءات المنظمة :

شروط الفضاء المنظم :

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; $\alpha \in K$ الحقل
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

التمرين الثالث :

برهن أن $\mathbb{R}^n$ هو فضاء منظم.

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$x_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

الحل :

نحقق من شروط الفضاء المنظم :

1. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$ واضح من التعريف

$$x_i = (x_1, \ldots, x_n)$$

2. $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\iff x_i^2 = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\iff x_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$x = 0$$

3. $\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2 x_i^2}$

$$= |\alpha| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(4) $\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}$

متراجحة مينكوفسكي

$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i}$

$\|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

بعد تحقق الشروط 1, 2, 3, 4 نجد أن R^n فضاء منظم.

التمرين الرابع:

برهن أن $C[a,b]$ هو فضاء منظم

$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ $x = x(t)$

الحل:

الحل في بداية المحاضرة القادمة

انتهت المحاضرة