كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ندعو عناصر الفضاء الخطي (الشعاعي - المتجهي) V أشعة أو متجهات وندعوه العنصر الحيادي بالنسبة للجمع (+) في الفضاء الخطي ونرمز له بالرمز 0_V وندعو عناصر الحقل F مقادير سلمية (عددية).

ملاحظة:

إذا كان V فضاء خطي فوق الحقل F عندئذٍ نصادف حالتين:

* الحالة الأولى:

إذا كان $F = R$ عندئذٍ ندعو V فضاء خطي حقيقي.

* الحالة الثانية:

إذا كان $F = C$ عندئذٍ ندعو V فضاء خطي عقدي.

مثال 1:

الفضاء الحقيقي R هو فضاء خطي حقيقي فوق نفسه لعمليتي الجمع والضرب العاديتان.

مثال 2:

الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}^n$ ذي n بعداً هو فضاء خطي فوق حقل الأعداد الحقيقية R أي $(\mathbb{R}^n, +, .)$ هو فضاء خطي حقيقي بالنسبة للعمليتين:

الأولى (+): داخلية ومعرفة بالشكل:

$$\forall x+y \in V \; ; \; x+y = z \in V$$

الثانية (.): خارجية ومعرفة بالشكل:

$\forall \alpha \in R \ \& \ \forall x \in V \Rightarrow \alpha x \in V$

* حيث الأولى $(+)$ وبشكل تناسبي في $\mathbb{R}^n$ تعرف:

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

* والثانية $(\cdot)$ تعرف بالشكل:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \& \ \forall x = (x_1, \dots, x_n)$

$\alpha \cdot x = \alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

الفضاء المنتظم:

إذا كان X فضاءً شعاعياً نعرف فوق الحقل F ندعو كل تطبيق $\| \ \|$ معرف بالشكل الآتي:

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$x \mapsto \| \ \| \to \|x\|$

ويحقق الشروط الآتية:

الشرط الأول:

$\|x\| = 0 \iff x = 0 \ ; \ x \in X \quad \&$

$\|x\| \geq 0 \ ; \ \forall x \in X$

الشرط الثاني:

$\forall \lambda \in F \ \& \ \forall x \in X \ ; \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

الشرط الثالث:

$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

نظيماً على X وندعو الثنائية $(X, \| \ \|)$ فضاءً منظماً واختصاراً X فضاء منظم وندعو العدد الحقيقي $\|X\|$ نظيم العنصر $x \in X$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كان X فضاء نظم متمم أي X فضاء خطي متمم معرف عليه نظيم.

إنّ X فضاء منظم عددي أي أن X فضاء خطي عددي معرف عليه نظيم.

مثال الفضاء المنظم:

إنّ الفضاء الخطي $\mathbb{R}^n$ هو فضاء خطي متمم وهو فضاء منظم بالنسبة للنظيم المعرف عليه بالشكل الآتي:

$$\|\ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

يبرهن بالعلي

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ملاحظة هامة للتطبيقات العلمية:

يأتي بالكتاب إما أن نثبت أن $(X, \|\ \|)$ فضاء منظم أي يجب إثبات أنّ $\|\ \|$ يحقق شروط النظيم أو نثبت أنّ $\|\ \|$ نظيماً على الفضاء الخطي X وهنا نثبت أن $\|\ \|$ يحقق شروط النظيم أو في الحالتين نبرهن أنّ $\|\ \|$ يحقق شروط النظيم.

مثال:

الفضاء الخطي $C[a,b]$ هو فضاء منظم بالنسبة للنظيم

$$\forall x = x(t) \in C[a,b] \quad \|x\| = \max |x(t)|$$

يبرهن بالعلي

$x(t)$ تحوي (أو يط) دالة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

العلاقة بين الفضاءات الناظمة والفضاءات المترية:

مبرهنة:

كل فضاء ناظم X هو فضاء متري وتابعة التولد بالعلاقة:

$$d(x,y)=\|x-y\| \quad ; \forall x,y\in X$$

ملاحظة هامة: إنّ التابعة المترية المعرفة على المبرهنة السابقة تسمّى التابعة المولدة من الناظم.

نتيجة هامة: كل فضاء ناظم هو فضاء متري ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة في الحالة العامة.

نتيجة: يمكن الحصول على ناظم أي فضاء من العلاقة:

$$d(x,o)=\|x-o\|=\|x\|$$

مثال (1):

الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ هو فضاء ناظم ونظيمه يعطى بالشكل:

* من جهة أولى لدينا:

$$(1)\quad d(x,o)=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}(x_i-o_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \quad ;$$

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

$$o_{\mathbb{R}^n}=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$$

* ومن جهة ثانية لدينا:

$$(2)\quad d(x,o)=\|x-o\|=\|x\|$$

من (1) و (2) نجد أنّ $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

مثال (2):

الفضاء المتري $C[a,b]$ هو فضاء ناظم ونظيمه يعطى بالشكل:

* من جهة أولى:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $d(x,0) = \max_{a\le t\le b} |x(t) - 0(t)| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$

* من خاصة ثانية لدينا:

② $d(x,0) = \|x - 0\| = \|x\|$

من ① و ② نجد أن: $\|x\| = \max |x(t)|$;

$\forall\, x = x(t) \in C[a,b]$

* مثال خاصة مألوفة على $\mathbb{R}$:

$d(x,0) = |x-0| = |x|$ & $d(x,0) = \|x-0\| = \|x\|$

$\Rightarrow \|x\| = |x|$

نتيجة هامة: $\mathbb{R}^n$ فضاء خطي متجهي ونظيم متري.

فضاءات الجداء الداخلي:

تعريف (الفضاء الأقليدي الجداء الداخلي):

ليكن E فضاء خطي متجهي نعرف عليه دالة:

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \langle x, y \rangle$

تحقق الشروط التالية:

① $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\forall x \in E$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$; $x \in E$

② $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\forall\, x, y \in E$

③ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; $\forall x, y \in E$

④ $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

$\forall x, y, z \in E$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جداء داخلي (سلمي) في الفضاء الخطي E و ندعو كل فضاء شعاعي E يعرف فيه جداء داخلي بفضاء إقليدي أو بفضاء جداء داخلي.

ملاحظة: أيضاً يمكن أن ندعو ثنائية $(E, <\ ,\ >)$ فضاء جداء داخلي أو فضاء إقليدي واختصاراً E فضاء إقليدي داخلي أو إقليدي و كإثبات E فضاء جداء داخلي (إقليدي) يكفي أن نثبت أن $<\ ,\ >$ تحقق شروط الجداء الداخلي.

مثال:

أثبت أن الفضاء $(\mathbb{R}^n, <\ ,\ >)$ أو $(\mathbb{R}^n$ اختصاراً) هو فضاء جداء داخلي أو فضاء إقليدي حيث $\mathbb{R}^n$ يعرف عليه الـ:

$$<\ ,\ > = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

بالشكل الآتي: $\forall x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ ؛

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad ; \quad y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$$

أي نبرهن أن $<\ ,\ >$ تحقق شروط الجداء الداخلي.

«يترك للطالب»

العلاقة بين الفضاءات المنظمة والإقليدية:

مبرهنة:

كل فضاء إقليدي حقيقي E هو فضاء منظم ونظيمه يولد بالجداء الداخلي وفق العلاقة:

$$\forall x \in E \quad ; \quad \|x\| = \sqrt{<x, x>}$$

«يترك للطالب»

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة:

كل فضاء إقليدي حقيقي E هو فضاء منظم وكل فضاء منظم $\mathbb{R}^n$ هو فضاء متري، وكمثال على ذلك الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو فضاء منظم حقيقي وهو فضاء إقليدي (فضاء جداء داخلي) وفضاء منظم وفضاء متري.

نتيجة هامة:

من البرهنة السابقة كل فضاء جداء داخلي (إقليدي) هو فضاء منظم ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيح في الحالة العامة.

أي ليس كل فضاء منظم هو فضاء إقليدي في الحالة العامة.

مساواة متوازي الأضلاع:

حتى يكون الفضاء المنظم E فضاء إقليدي يكفي تحقق المساواة:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \quad ; \forall x,y\in E$$

وتدعى المساواة مساواة متوازي الأضلاع.

ملاحظة هامة جداً في تطبيق العلم:

يكفي عدم تحقق هذه المساواة لمساواة متوازي الأضلاع لنحكم أن الفضاء منظم وليس إقليدياً.

ملاحظة: لدينا:

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle} \quad ; \forall x\in E$$

حيث E فضاء إقليدي وبالتالي E فضاء منظم وظيفة يعطى بالعلاقة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}$$

بالتربيع:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$
$$= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$
$$= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

تمرين للطلاب: أثبت صحة متطابقة متوازي الأضلاع.

* لدينا المثال الآتي يثبت أنّه ليس كل فضاء منظم هو فضاء إقليدي و تحديداً الفضاء المنظم الذي لا يحقق متطابقة متوازي الأضلاع:

تمرين هام:

ليكن $C[a,b] = C[0, \frac{\pi}{2}]$ فضاء التوابع الحقيقية والمستمرة المعرفة على المجال الحقيقي $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ وهو فضاء منظم (أثبت ذلك) ونظيمه يعطى بالعلاقة

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$$

والمطلوب تحقق فيما إذا كان المنظم $[0, \frac{\pi}{2}]$ هو فضاء إقليدي.

الحل: من أجل ذلك نتحقق أن هذا الفضاء يحقق متطابقة متوازي الأضلاع.

ومن أجل ذلك نأخذ:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(t) = \cos(t)$, $g(t) = \sin(t)$

ونتحقق أنّ:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

$$\|f\| = \max_{a\le t\le b} |f(t)| = \max_{a\le t\le b} |\cos(t)| = 1$$

$$\|g\| = \max_{a\le t\le b} |g(t)| = \max_{a\le t\le b} |g(t)| = 1$$

$$\|f+g\| = \max_{a\le t\le b} |f(t)+g(t)| = \max_{a\le t\le b} |\cos(t)+\sin(t)| \le$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\|f-g\| = \max_{a\le t\le b} |\cos(t)-\sin(t)| = 1$$

$$\Rightarrow \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2+1 = 3 \neq$$

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2(1+1) \neq 4$$

$\Leftarrow$ $C[0,\frac{\pi}{2}]$ و $\|\cdot\|_\infty$ يحقق متوازي الأضلاع إذا

$C[0,\frac{\pi}{2}]$ ليس فضاءً إقليدياً وبشكل عام فإنّ الفضاء

$C[a,b]$ ليس فضاءً إقليدياً.

ملاحظة هامة!

إذا كانت $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية بنقاط الفضاء الإقليدي E وكانت هذه المتتالية متقاربة عند أي نقطة a من فضاء

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إقليدي E

$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a$

عندئذٍ شرط التقارب هو:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall m\geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x^m, a)<\varepsilon$

وبما أن كل فضاء إقليدي هو فضاء متظم و $d(x,y)=\|x-y\|$

$\Leftarrow$ شرط التقارب للمتتالية $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ يكتب بالشكل:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall m\geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \|x^{(m)}-a\|<\varepsilon$

ونقول في هذه الحالة أن المتتالية $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ متقاربة بانتظام أو متقاربة من الفضاء E وفقاً لمفهوم التظيم

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z