كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التمرين الأول:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

تطبيق خطي معرف وفق القاعدة:

$f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y, 5x+6y+3z)$

① عين $\ker f$ وجد أساس له.

② عين أساس $\ker f$ إلى أساس لـ $\mathbb{R}^3$

③ جد أساس لـ $Im f$

الحل:

①

$$\ker f = \{(x,y,z) : f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 = (0,0,0,0)\}$$

$\Longrightarrow$

$x+y+z=0$

$x+2y-z$

$2x+y=0$

$5x+6y+3z=0$

نكمل باستخدام غاوس

$$\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y=0 \\ 5x+6y+3z=0 \end{matrix} \xrightarrow[-5l_1+l_4]{-2l_1+l_3} \begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2y-2z=0 \\ y-2z=0 \\ y-2z=0 \end{matrix}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

عدد المعادلات = أقل عدد المجاهيل ، لذلك لدينا مجهولين

$\Rightarrow x+y+z=0$

$y-2z=0$

بفرض $z=x \Rightarrow y=2x$

$x=-3x$

$\ker f = \{(-3x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$

$\ker f$ أساس لـ $(-3, 2, 1)$

(2)

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نضيف أعمدة لـ $\ker f$ حيث تبقى الأعمدة مستقلة

أي تبقى المصفوفة مربعة

(3)

$f(0,1,0) = (1,2,3,6)$

$f(1,0,0) = (1,1,2,5)$

$(1,1,2,5), (1,2,3,6)$

أساس لـ $\operatorname{Im} f$

ط. لدينا الأعمدة

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

أساس لـ $\mathbb{R}^3$

$f(1,0,0) = (1,1,2,5)$

$f(0,1,0) = (1,2,3,6)$

$f(0,0,1) = (1,-1,0,3)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لحساب $\dim \operatorname{Im} f$ نوجد

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_3]{-L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{+2L_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ مصفوفة مدرجة

بالتالي $\operatorname{Im} f$ أساسه $\{(1,1,2,5),(0,1,1,1)\}$

التمرين الثاني:

ليكن $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z+t,\ x+2z-t,\ x+y+3z-3t)$$

1. عيّن $\ker f$ ثم أوجد أساساً له.
2. مدّد أساس $\ker f$ إلى أساس $\mathbb{R}^4$.
3. جد أساساً لـ $\operatorname{Im} f$.

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,t) = (0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow (x-y+z+t,\ x+2z-t,\ x+y+3z-3t) = (0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z+t=0 \\ x+2z-t=0 \\ x+y+3z-3t=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-L_1+L_3]{-L_1+L_2} \left.\begin{array}{l} x-y+z+t=0 \\ y+z-2t=0 \\ 2y+2z-4t=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-2L_2+L_3}$$

$$x-y+z+t=0$$

$$y+z-2t=0$$

بفرض $z=x$ و $t=1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y = -x + 2\beta$ ، $x = y - z - t = -x + 2\beta - x - \beta = -2x + \beta$

$x = -2x + \beta$

$\ker f = \{-2x + \beta, -x + 2\beta, x, \beta\}$

$\ker f = \{(-2x, -x, x), (\beta, 2\beta, \beta)\}$

$= \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 1, 0)\}$

2- أضيفوا إلى الأساس $\ker f$ بحيث تشكل متغلة أي المجموعة مولدة

3- أ.

$f(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$

$f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1)$

$\operatorname{Im} f$ أساس لـ $\{(-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

$f(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$

$f(1, 0, 0, 0) = (+1, 1, 1)$

$f(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3)$

$f(0, 0, 0, 1) = (1, -1, 3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \\ -L_1 + L_4 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -L_2 + L_3 \\ 2L_2 + L_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين التالي:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x+y+z, x+3y+3z, 2y+3z, 4x+6y+7z)$

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$f(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+3y+3z=0 \\ 2y+3z=0 \\ 4x+6y+7z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-4L_1+L_4]{-L_1+L_2} \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2y+2z=0 \\ 2y+3z=0 \\ 2y+3z \end{array}\right\} \xrightarrow{-L_2+L_3}$$

$x+y+z=0$

$2y+2z=0$

$z=0$

$\Longrightarrow z=0 \Longrightarrow y=0, x=0$

$\ker f = \{(0,0,0)\}$

← أمثلة:

إذا $\ker f = \{\varphi\}$ أساس لـ $\ker f$ هو الفضاء الصفري

$f(1,0,0) = (1,1,0,4)$

$f(0,1,0) = (1,3,2,6)$

$f(0,0,1) = (1,3,3,7)$

بما أنه أمثلة هامة نتيجة

$\operatorname{Im} f$ أساس لقاعدة $\{(1,1,0,4), (1,3,2,6), (1,3,3,7)\}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة